



Môn: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ nhất: 25/12/2025

Đề thi gồm 01 trang, có 04 câu

Câu 1 (5 điểm). Với mỗi số nguyên dương n , xét đa thức $P_n(x) = x^{3n} - 3 \cdot 4^{n-1} x^n - 2^{3n-3}$.

a) Chứng minh $P_n(x)$ có đúng một nghiệm thực dương, kí hiệu là a_n .

b) Đặt $b_n = \frac{2 - a_n}{n}$ và $c_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Chứng minh dãy số $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn.

Câu 2 (5 điểm). Để khám phá không gian, các nhà khoa học thường phải quan sát những vật thể xa xôi như sao chổi, tiểu hành tinh và các hiện tượng thiên văn khác. Nhằm mục đích đó, các nhà khoa học thiết kế và phóng các vệ tinh quan sát lên quỹ đạo quanh Trái Đất. Hầu hết các vệ tinh không chuyển động theo vòng tròn hoàn hảo mà có quỹ đạo là một đường elip, với Trái Đất nằm ở một trong hai tiêu điểm của elip. Khi một vệ tinh chuyển động trên quỹ đạo elip, khoảng cách giữa nó và vật thể cần quan sát liên tục thay đổi. Thông thường, nếu khoảng cách từ vệ tinh đến vật thể cần quan sát là ngắn nhất thì các thiết bị cảm biến trên vệ tinh sẽ nhận được tín hiệu tốt nhất.

Cho một vệ tinh (được xem như là một chất điểm) chuyển động xung quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một đường elip. Trong không gian với hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục Ox, Oy, Oz đều bằng 6400 km), giả sử vệ tinh chuyển động trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) theo quỹ đạo có phương trình là $x^2 + 3y^2 = 17$. Vệ tinh cần quan sát một vật thể (cũng được xem như là một chất điểm) chuyển động trong không gian. Theo các kết quả nghiên cứu, khi vật thể chuyển động đến vị trí $A\left(2; \frac{16}{\sqrt{3}}; 8\right)$ thì việc quan sát vật thể đó là tốt nhất. Hãy xác định tọa độ điểm C (trên quỹ đạo elip của vệ tinh) trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ nói trên sao cho khoảng cách từ vị trí C đến vị trí A là ngắn nhất.

Câu 3 (5 điểm). Cho n, a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $1 < n^2 < a < b < n^2 + n + 3$. Tìm tất cả các ước nguyên dương thuộc khoảng $(n^2; n^2 + n + 3)$ của tích ab .

Câu 4 (5 điểm). Bạn An chơi trò chơi ghi lên bảng các bộ ba số theo thứ tự từ trái sang phải. Ban đầu trên bảng ghi sẵn bộ ba số $(1, 1, 1)$. Ở mỗi lượt chơi, An thực hiện một trong hai thao tác sau với bộ ba số (x, y, z) hiện có:

(i) Xóa bộ ba số (x, y, z) và viết lên bảng bộ ba số $(y, z, x + z)$.

(ii) Xóa bộ ba số (x, y, z) và viết lên bảng bộ ba số $(x + z + 1, x + y + z + 1, x + y + 2z + 1)$.

a) Chứng minh An cần đúng 4 lượt chơi để có thể viết lên bảng bộ ba số $(a, b, 6)$.

b) Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho tồn tại một cách chơi để sau k lượt, An có thể viết lên bảng bộ ba số $(c, d, 129)$.

----- HẾT -----

* Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;

* Giám thị KHÔNG giải thích gì thêm.

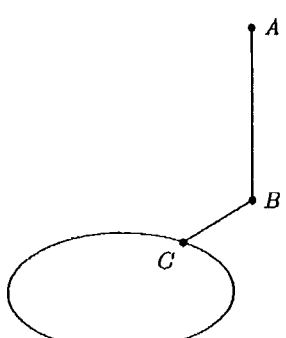


Môn: TOÁN

Ngày thi: 25/12/2025

Đáp án gồm 04 trang

Câu	Y	Nội dung
1 (5,0 điểm)	a	Ta có $P_n(x) = x^{3n} - 3 \cdot 4^{n-1} x^n - 2^{3n-3}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Vì $P_n(0) = -2^{3n-3} < 0$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} P_n(x) = +\infty$ nên $P_n(x)$ có ít nhất một nghiệm dương a_n. Xét $P_n(x) = x^{3n} - 3 \cdot 4^{n-1} x^n - 2^{3n-3}$ trên $(0; +\infty)$. Ta có $P'_n(x) = 3nx^{3n-1} - 3n \cdot 4^{n-1} x^{n-1}$, $\forall x \in (0; +\infty)$; $P'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{4^{n-1}}.$ Suy ra $P'_n(x) > 0$ với mọi $x \in (\sqrt[n]{4^{n-1}}; +\infty)$ và $P'_n(x) < 0$ với mọi $x \in (0; \sqrt[n]{4^{n-1}})$. Kết hợp với $P_n(0) = -2^{3n-3} < 0$, suy ra $P_n(x) = 0$ có không quá một nghiệm dương. Vì vậy $P_n(x)$ có đúng một nghiệm dương với mọi $n \geq 1$.
	b	Ta có $P_n(2) = 2^{3n-3} > 0$ với mọi $n \geq 1$. Suy ra $P_n(0)P_n(2) < 0$. Vì vậy, $P_n(x)$ có đúng một nghiệm dương thuộc $[0; 2]$. Đặt $x = 2\sqrt{\cos \varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Khi đó $x^{3n} - 3 \cdot 4^{n-1} x^n = 2^{3n-3} \Leftrightarrow 2^{3n-3} (8 \cos^3 \varphi - 6 \cos \varphi - 1) = 0$ $\Leftrightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$ Vì $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ nên $\varphi = \frac{\pi}{9}$. Ta nhận được $a_n = 2\sqrt[n]{\cos \frac{\pi}{9}}$. Vì vậy $0 < a_n < 2$ nên $b_n > 0$ với mọi n. Suy ra $(c_n)_{n=1}^\infty$ là dãy tăng. Ta có: $a_n = 2 \left(\cos \frac{\pi}{9} \right)^{\frac{1}{n}}$. Vì $e^x \geq 1+x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $A^x = e^{x \ln A} \geq 1+x \ln A$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $A > 0$. Áp dụng bất đẳng thức trên cho $A = \cos \frac{\pi}{9}$ và $x = \frac{1}{n}$, ta nhận được $\left(\cos \frac{\pi}{9} \right)^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \frac{1}{n} \ln \cos \frac{\pi}{9}.$ Dẫn tới $2 - a_n = 2 \left(1 - \left(\cos \frac{\pi}{9} \right)^{\frac{1}{n}} \right) \leq 2 \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n} \ln \cos \frac{\pi}{9} \right) \right) = -\frac{2}{n} \ln \cos \frac{\pi}{9} \text{ với mọi } n.$ Vì vậy $b_n = \frac{2 - a_n}{n} < -\frac{2}{n^2} \ln \cos \frac{\pi}{9}$, $\forall n \geq 1$.

		Suy ra $c_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq -2 \ln \cos \frac{\pi}{9} \left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$ $\leq -2 \ln \cos \frac{\pi}{9} \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right)$ $= -2 \ln \cos \frac{\pi}{9} \left(2 - \frac{1}{n} \right) < -4 \ln \cos \frac{\pi}{9}$ với mọi n. Như vậy $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ bị chặn trên. Do đó $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ có giới hạn hữu hạn.
2 (5,0 điểm)		Gọi B là hình chiếu của A trên mặt phẳng (Oxy). Ta có $B\left(2; \frac{16}{\sqrt{3}}; 0\right)$. Vị trí C trên quỹ đạo của vệ tinh để quan sát vật thể tại vị trí A rõ nhất khi AC ngắn nhất. Mà AC ngắn nhất khi BC ngắn nhất. Bài toán trở thành: Tìm vị trí điểm C trên elip $(E): x^2 + 3y^2 = 17$ sao cho BC ngắn nhất. Gọi tọa độ điểm C là $C(x; y; 0)$. Ta có $BC^2 = (x-2)^2 + \left(y - \frac{16}{\sqrt{3}}\right)^2 = x^2 + y^2 - 4x - \frac{32}{\sqrt{3}}y + \frac{268}{3}.$ Ta có $4x = 2 \cdot x\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \leq 2x^2 + 2$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$. Ta có $\frac{32}{\sqrt{3}}y = 2 \cdot 2y \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \leq 4y^2 + \frac{64}{3}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $y = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Do đó $BC^2 = x^2 + y^2 - 4x - \frac{32}{\sqrt{3}}y + \frac{268}{3} \geq -(x^2 + 3y^2) + 66 = 49$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1, y = \frac{4}{\sqrt{3}}$. Vậy tại điểm $C\left(1; \frac{4}{\sqrt{3}}; 0\right)$ thì AC ngắn nhất. 
3 (5,0 điểm)		Gọi c là ước nguyên dương thuộc khoảng $(n^2; n^2 + n + 3)$ của tích ab. *) $c = a$: thỏa mãn điều kiện bài toán. *) $c = b$: thỏa mãn điều kiện bài toán. Giả sử $c \neq a, c \neq b$. Ta sẽ chứng minh có điều vô lý. Đặt $a = n^2 + i; b = n^2 + j; c = n^2 + k$ ($1 \leq i, j, k \leq n+2, k \neq i, k \neq j$ và $i < j$). Vì $n^2 \equiv -k \pmod{n^2 + k}$ nên $ab = (n^2 + i)(n^2 + j) \equiv (i - k)(j - k) \pmod{n^2 + k}$. Vì $c = n^2 + k$ là ước của ab nên $(i - k)(j - k) \equiv 0 \pmod{n^2 + k}$. Do $i - k \geq 1, j - k \geq 1$ nên $i - k \cdot j - k \geq n^2 + k > n^2$. • Xét $1 \leq i < j \leq n+1$: Nếu $1 \leq k \leq n+1$ thì $1 \leq i - k \leq n, 1 \leq j - k \leq n \Rightarrow i - k \cdot j - k \leq n^2$. Điều này vô lý. Nếu $k = n+2$: +) Khi $2 \leq i < j \leq n+1$ thì $i - k = n+2 - i \leq n, j - k = n+2 - j \leq n-1$

		$\Rightarrow i-k \cdot j-k \leq n(n-1) < n^2. \text{ Điều này là vô lý.}$ +) Khi $i=1$ thì $i-k =n+2-1=n+1$. Nếu $j \geq 3$ thì $j-k =n+2-j \leq n-1 \Rightarrow i-k \cdot j-k \leq (n+1)(n-1) < n^2$. Điều này vô lý. Nếu $j=2$ thì $j-k =n+2-j=n \Rightarrow i-k \cdot j-k =(n+1)n : n^2+n+2$. Điều này vô lý. • Xét $j=n+2$: Nếu $k \geq 2$ thì $i-k \leq n+1-2=n-1, j-k =n+2-k \leq n$ $\Rightarrow i-k \cdot j-k \leq n(n-1) < n^2$. Điều này vô lý. Nếu $k=1$ thì $i-k =i-1, j-k =n+1 \Rightarrow i-k \cdot j-k =(i-1)(n+1)$. Suy ra $(i-1)(n+1) \geq n^2+1 \Rightarrow i=n+1$ $\Rightarrow n(n+1) : n^2+1 \Rightarrow n-1 : n^2+1 \Rightarrow n-1 \geq n^2+1$. Điều này vô lý. Do đó không tồn tại ước nguyên dương $c \in (n^2; n^2+n+3)$ của tích ab mà $c \neq a, c \neq b$. Vậy tập hợp các ước của ab thỏa mãn bài toán là $\{a; b\}$.
4 (5,0 điểm)	a	Xét lượt đầu tiên, nếu sử dụng thao tác loại 2 thì ta có bộ số $(3, 4, 5)$ và từ đây số ngoài cùng bên phải sẽ luôn tăng ít nhất 3 đơn vị nên không thể viết được số 6. Như vậy lượt đầu An phải sử dụng loại 1 và viết bộ số $(1, 1, 2)$. Từ trạng thái này, nếu sử dụng thao tác loại 2 sẽ tăng số ngoài cùng bên phải lên ít nhất 5. Do đó, nếu sử dụng thao tác loại 2 trong các trạng thái tiếp theo thì An không thể viết được số 6. Tóm lại, An chỉ sử dụng thao tác loại 1 và sau đúng 4 lượt chơi, các bộ số trên bảng lần lượt là: $(1, 1, 2) \rightarrow (1, 2, 3) \rightarrow (2, 3, 4) \rightarrow (3, 4, 6)$.
	b	Xét dãy số $(a_k)_{k \geq 1}$ xác định bởi: $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ và $a_{k+3} = a_{k+2} + a_k$ với mọi $k \geq 1$. Nhận xét 1. Một số nguyên dương n bất kỳ biểu diễn được một cách duy nhất dưới dạng tổng các số hạng phân biệt của dãy $(a_k)_{k \geq 1}$, trong đó chỉ số của hai số cách nhau ít nhất 3 đơn vị và không có số hạng nào là a_1, a_2. Ta chứng minh nhận xét bằng quy nạp mạnh. Trường hợp $n=1=a_3$: đúng. Giả sử mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương nhỏ hơn n. Gọi a_k là số hạng với chỉ số k lớn nhất thỏa mãn $a_k \leq n$. Trong biểu diễn của n phải có a_k, vì bằng quy nạp ta có $a_{k-1} + a_{k-4} + \dots < a_k$. Khi đó xảy ra 2 trường hợp: hoặc $n=a_k$ là biểu diễn duy nhất; hoặc $n > a_k$ và tồn tại biểu diễn cho $n-a_k$. Để ý rằng số $n-a_k$ nhỏ hơn a_{k-2}, vì nếu ngược lại $n \geq a_k + a_{k-2} = a_{k+1}$, mâu thuẫn với cách chọn a_k. Do đó, trong biểu diễn của $n-a_k$ không chứa a_{k-1}, a_{k-2} và ta thu được biểu diễn thỏa mãn yêu cầu cho n. Với mọi n, biểu diễn $n = \sum a_{k_i}$ trong Nhận xét 1 tương ứng với một dãy nhị phân thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện sau đây:

1. Độ dài của dãy bằng k_j , trong đó k_j là chỉ số lớn nhất sao cho $a_{k_j} \leq n$;
2. Vị trí thứ k_i (tính từ trái sang phải) nhận giá trị 1 nếu và chỉ nếu a_{k_i} có trong biểu diễn của n .

Ta gọi dãy nhị phân tương ứng là biểu diễn chuẩn và ký hiệu là $\bar{n}$.

Nhận xét 2. Với mỗi số tự nhiên n , xét biểu diễn $n = \sum a_{k_i}$ và ánh xạ $f(n) = \sum a_{k_i-1}$. Khi đó, bộ số trên bảng sẽ luôn có dạng $(f(f(n)), f(n), n)$.

Thật vậy, bộ số ban đầu có dạng $(a_1, a_2, a_3) = (f(f(1)), f(1), 1)$. Giả sử bộ số (x, y, z) thỏa mãn $z = \sum a_{k_i+2}$, $y = \sum a_{k_i+1}$, $x = \sum a_{k_i}$, ta kiểm tra cả hai loại thao tác đều có bộ số ở dạng trên.

Với loại 1, ta có $f(x+z) = f\left(\sum (a_{k_i+2} + a_{k_i})\right) = f\left(\sum a_{k_i+3}\right) = \sum a_{k_i+2} = z$.

Với loại 2, ta có $f(x+y+2z+1) = f\left(\sum a_{k_i+5} + a_3\right) = \sum a_{k_i+4} + a_2 = x+y+z+1$, và $f(x+y+z+1) = f\left(\sum a_{k_i+4} + a_2\right) = \sum a_{k_i+3} + a_1 = x+z+1$.

Nhận xét 3. Từ tính toán ở Nhận xét 2, thao tác loại 1 tương đương với việc thêm một số 0 vào bên trái biểu diễn chuẩn của z trong (x, y, z) trên bảng, còn thao tác loại 2 tương đương với việc thêm 001 vào bên trái biểu diễn chuẩn của z .

Quay lại bài toán, để ý rằng bộ số ban đầu ta quy ước là (a_1, a_2, a_3) ứng với biểu diễn chuẩn $(100, 010, 001)$. Do đó, bài toán tương đương với việc tìm k nhỏ nhất để sau k bước thêm 0 hoặc thêm 001 vào đuôi của $\bar{a}_3 = 001$ để được $\overline{129}$.

Đến đây, ta tính được 15 số hạng đầu tiên của dãy $(a_k)_{k \geq 1}$ là

$$1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60, 88, 129.$$

Ta suy ra biểu diễn chuẩn của 129 là 0000000000000001, nên cần đúng 12 biến đổi loại 1. Vậy $k = 12$.

----- HẾT -----



**KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG NĂM HỌC 2025 - 2026**

Môn: **TOÁN**

Thời gian làm bài: **180 phút** (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi thứ hai: **26/12/2025**

Đề thi gồm 01 trang, có 03 câu

Câu 5 (7 điểm). Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi E, F lần lượt là các điểm đối xứng của A qua B, C . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Trên đường thẳng AM lần lượt lấy các điểm I và P sao cho tam giác AIE cân tại I và tam giác APF cân tại P . Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng IE và PF .

a) Chứng minh T thuộc đường tròn (O) .

b) Gọi D là giao điểm của hai đường thẳng BI và CP . Gọi J là giao điểm của hai đường thẳng TD và IP . Gọi X là giao điểm của hai đường thẳng OT và BC . Các đường thẳng AT, AX lần lượt cắt EF tại các điểm L, U . Chứng minh bốn đường tròn ngoại tiếp của các tam giác TAJ, TIP, TEF và TLU cùng đi qua một điểm chung thứ hai khác T .

Câu 6 (6 điểm).

a) Tìm số nghiệm thực dương phân biệt của đa thức $Q(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 1$.

b) Giả sử a, b, c, d là các số nguyên sao cho đa thức $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có 3 nghiệm thực dương phân biệt và không có nghiệm hữu tỷ. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = |a| + |b| + |c| + |d|$.

Câu 7 (7 điểm). Trong một trò chơi, nhân vật Mario cần di chuyển về phía trước bằng các lần nhảy xa với độ dài mỗi lần là 1 mét hoặc a mét hoặc b mét, trong đó a và b là các số nguyên dương thỏa mãn $1 < a < b$. Cho trước một chặng đường cần di chuyển có độ dài là m mét, với m là một số nguyên dương, Mario luôn sử dụng chiến thuật nhảy về phía trước như sau: trước tiên Mario sẽ thực hiện các lần nhảy với độ dài mỗi lần b mét (với số lần tối đa có thể sao cho chưa vượt quá đích); nếu vẫn chưa tới đích, Mario sẽ thực hiện tiếp các lần nhảy với độ dài mỗi lần a mét (với số lần nhảy tối đa sao cho chưa vượt quá đích), rồi cuối cùng là chuyển sang các lần nhảy với mỗi bước nhảy là 1 mét. Mario sẽ thắng nếu không tồn tại cách di chuyển nào đến đích có số lần nhảy ít hơn so với chiến thuật trên. Trong trường hợp ngược lại, Mario sẽ thua.

a) Hãy chỉ ra rằng với $(a, b) = (6, 14)$, tồn tại một số m để Mario thua trong trò chơi này.

b) Tìm số lượng tất cả các cặp (a, b) , với $1 < a < b \leq 100$, để Mario luôn thắng theo chiến thuật trên với mọi số nguyên dương m .

----- HẾT -----

* Thí sinh **KHÔNG** được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay;

* Giám thị **KHÔNG** giải thích gì thêm.

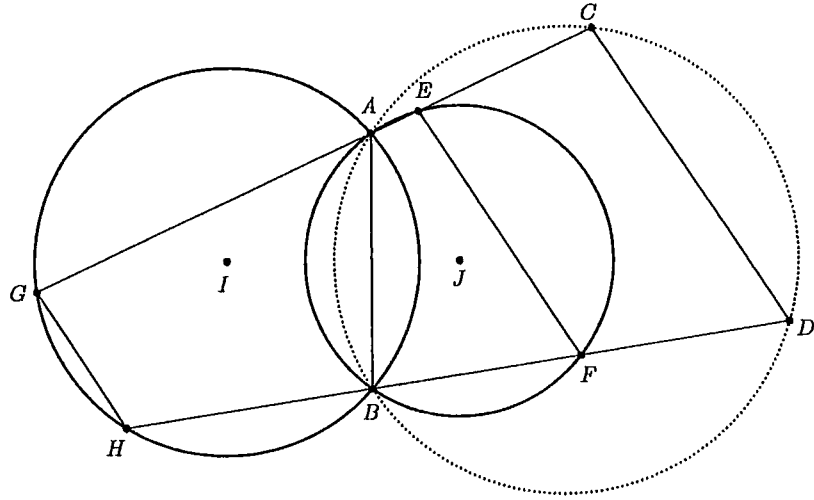


Môn: TOÁN

Ngày thi: 26/12/2025

Đáp án gồm 07 trang

Câu	Ý	Nội dung
5 (7,0 điểm)	a	Xét hình vẽ sau đây: Gọi T' là tâm phép vị tự quay biến AF thành EA. Khi đó $\Delta T'AF \sim \Delta T'EA$. Suy ra, $\Delta T'CF \sim \Delta T'BA$ (do B, C là trung điểm của các đoạn thẳng EA, AF). Suy ra, $\widehat{T'BA} = \widehat{T'CF}$ và $\frac{T'B}{T'C} = \frac{BA}{CF} = \frac{AB}{AC}$. Ta suy ra tứ giác $T'BAC$ là tứ giác nội tiếp và điều hòa. Theo tính chất của tứ giác điều hòa, AT' là đường đối trung của ΔABC, hay $\widehat{T'AB} = \widehat{CAM}$. Mà $\widehat{T'AB} = \widehat{T'FC}$ và $\widehat{CAM} = \widehat{CFP}$, nên $\widehat{T'FC} = \widehat{CFP}$. Ta suy ra T' thuộc PF. Tương tự, ta cũng chứng minh được T' thuộc IE. Do đó, $T' \equiv T$. Vậy T thuộc đường tròn (O).
	b	Trước hết, ta có bổ đề sau đây. Bổ đề. Cho 2 đường tròn (I) và (J) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Giả sử hai điểm $C \neq D$ không thuộc hai đường tròn và thỏa mãn $\frac{P_{C(I)}}{P_{C(J)}} = \frac{P_{D(I)}}{P_{D(J)}}$. Khi đó, bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Chúng minh bổ đề. Xét hình vẽ sau:



Gọi E, G lần lượt là giao điểm của CA với (J) và (I) ; F, H lần lượt là giao điểm của DB với (J) và (I) . Suy ra $GH \parallel EF$, do cùng đối song với AB trong tứ giác $ABCD$. Từ $\frac{P_{C(I)}}{P_{C(J)}} = \frac{P_{D(I)}}{P_{D(J)}}$, ta suy ra $\frac{CG}{CE} = \frac{DH}{DF}$; mà GH và EF song song nên CD song song EF (định lý Thales). Vậy CD đối song AB hay A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn. Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán, gọi (O_1) và (O_2) lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp TAJ, TEF . Khi đó,

$$\frac{P_{I(O_1)}}{P_{I(O_2)}} = \frac{\overline{IA} \cdot \overline{IJ}}{\overline{IE} \cdot \overline{IT}} = -\frac{IJ}{IT}, \quad \frac{P_{P(O_1)}}{P_{P(O_2)}} = \frac{\overline{PA} \cdot \overline{PJ}}{\overline{PF} \cdot \overline{PT}} = -\frac{PJ}{PT}.$$

Gọi K là giao điểm thứ hai khác T của (O_1) và (O_2) . Áp dụng Bổ đề cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) (cắt nhau tại T, K) và hai điểm I, P , ta quy về chứng minh $\frac{IJ}{IT} = \frac{PJ}{PT}$. (*)

Vì BI và CP lần lượt là trung trực của AE và AF , ta suy ra D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và AD là đường kính của (O) . Ta có

$$\widehat{ETF} = \widehat{EAF} + \widehat{AET} + \widehat{AFT} = \widehat{EAF} + \widehat{EAM} + \widehat{FAM} = 2\widehat{EAF}.$$

Mặt khác, $\widehat{EDF} = 2\widehat{EAF}$ (do D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF). Do đó, $\widehat{EDF} = \widehat{ETF}$ và ta suy ra tứ giác $ETDF$ nội tiếp. Vì $DE = DF$ nên D là điểm giữa cung EF . Suy ra, TD là phân giác góc $\widehat{ITP}$ nên (*) đúng, tức là đường tròn (TIP) cũng đi qua giao điểm T, K của (O_1) và (O_2) .

Cho AT cắt BC ở H . Cho AU cắt lại $(O), (O_1)$ lần lượt ở N, Q . Để chứng minh (TLU) đi qua K , cũng theo Bổ đề, ta quy về chứng minh rằng

$$\frac{P_{L(O_1)}}{P_{L(O_2)}} = \frac{P_{U(O_1)}}{P_{U(O_2)}} \Leftrightarrow \frac{\overline{LT} \cdot \overline{LA}}{\overline{LE} \cdot \overline{LF}} = \frac{\overline{UQ} \cdot \overline{UA}}{\overline{UE} \cdot \overline{UF}} \Leftrightarrow \frac{2\overline{LT} \cdot \overline{HA}}{4\overline{HB} \cdot \overline{HC}} = \frac{2\overline{UQ} \cdot \overline{XA}}{4\overline{XB} \cdot \overline{XC}} \Leftrightarrow \frac{TL}{TH} = \frac{UQ}{NX}.$$

Gọi G là giao điểm hai tiếp tuyến ở A, T của (O) và OG lần lượt cắt AT, AM ở W, Y . Cho AM cắt lại (O) ở S và kẻ tiếp tuyến của (O) ở T, S cắt nhau ở R .

6 (6,0 điểm)	a Xét đa thức $R(x) = -x^3 Q\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$. Ta thấy mỗi nghiệm dương của $Q(x)$ sẽ tương ứng với đúng một nghiệm dương của $R(x)$. Ta có đạo hàm $R'(x) = 3x^2 - 8x + 5$. Nghiệm của $R'(x)$ là $x_{CD} = 1 > 0$, $x_{CT} = \frac{5}{3} > 0$. Hàm số $R(x)$ tăng thực sự trên các nửa khoảng $(-\infty; x_{CD}]$, $[x_{CT}; +\infty)$ và giảm thực sự trên đoạn $[x_{CD}; x_{CT}]$. Khi đó $R(0) = -1 < 0$, $R(x_{CD}) = R(1) = 1 > 0$ và $R(x_{CT}) = R\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{23}{27} > 0$. Do $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = +\infty$, đồ thị hàm $y = R(x)$ cắt trục hoành tại một điểm duy nhất có hoành độ thuộc $(0; 1)$. Suy ra đa thức $R(x)$ có duy nhất một nghiệm dương, kéo theo $Q(x)$ cũng có duy nhất một nghiệm dương.
	b Nếu $P(x)$ thỏa mãn điều kiện thì $-P(x)$ cũng thỏa mãn nên có thể giả sử $a > 0$. Gọi $r < s < t$ là các nghiệm dương của $P(x)$. Khi đó $P(x) = a(x-r)(x-s)(x-t)$. Theo định lí Viète ta có $r+s+t = \frac{-b}{a} > 0$, $rs+st+tr = \frac{c}{a} > 0$, $rst = -\frac{d}{a} > 0$. Vì $P(x)$ có 3 nghiệm dương nên $c > 0$, $b < 0$, $d < 0$. Đặt $A = a$, $b = -B$, $c = C$, $d = -D$, và $S_1 = r+s+t = \frac{B}{A} > 0$, $S_2 = rs+st+tr = \frac{C}{A} > 0$, $S_3 = rst = \frac{D}{A} > 0$. Khi đó, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, để ý điều kiện r, s, t là 3 số dương phân biệt, ta nhận được $S_1^2 > 3S_2$, $S_2^2 > 3S_1S_3$. Theo bất đẳng thức AM-GM cho 3 số dương phân biệt ta cũng có $S_1 > 3\sqrt[3]{S_3}, S_2 > 3\sqrt[3]{S_3^2} \Rightarrow S_1S_2 > 9S_3.$ Kết hợp lại ta suy ra $3AC < B^2$, $3BD < C^2$, $9AD < BC$. (1) Ta sẽ chỉ ra rằng $S = a + b + c + d = A + B + C + D \geq 13$. Thật vậy, giả sử $S \leq 12$. Khi đó vì $A, D \geq 1$ nên $9AD < BC \leq \left(\frac{B+C}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{12-A-D}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{12-2\sqrt{AD}}{2}\right)^2 = (6-\sqrt{AD})^2.$ Suy ra $2AD + 3\sqrt{AD} - 9 < 0$, tức là $-3 < \sqrt{AD} < \frac{3}{2}$. Vì $A, D \geq 1$ nên $AD \in \{1; 2\}$. Trường hợp 1: Giả sử $AD = 1$. Khi đó $A = D = 1$, suy ra $B + C \leq 10$, $BC > 9$. Do $BC > 9 \Rightarrow B + C > 6$. Vậy $B + C \in \{7; 8; 9; 10\}$. Mặt khác từ (1) dẫn tới $3C < B^2$, $3B < C^2$. (2) Do đó nếu trong B, C có một số lớn hơn 3 thì số còn lại cũng lớn hơn 3. (*) Ta xét các trường hợp sau: <i>Trường hợp 1.1:</i> $B + C = 7$. Rõ ràng trường hợp này không thỏa mãn (*). <i>Trường hợp 1.2:</i> $B + C = 8$. Do $BC > 9$ và (*) nên chỉ có cặp số $(B, C) = (4, 4)$.

	Tuy nhiên khi đó đa thức $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ có nghiệm hữu tỷ $x = 1$ nên loại. <i>Trường hợp 1.3:</i> $B + C = 9$. Do $BC > 9$ và (*) nên $(B, C) \in \{(4, 5); (5, 4)\}$. Xét $(B, C) = (4, 5)$. Khi đó $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ có $P'(x) = 3x^2 - 8x + 5$. Nghiệm của $P'(x)$ là $x_{CB} = 1, x_{CT} = \frac{5}{3}$. Do $P(0) = -1 < 0, P(1) = 1 > 0, P\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{125}{27} - \frac{100}{9} + \frac{25}{3} - 1 = \frac{23}{27} > 0$, nên đa thức $P(x)$ có duy nhất một nghiệm dương, nghiệm này thuộc khoảng $(0; 1)$: loại. Xét $(B, C) = (5, 4)$. Theo câu a) đa thức $P(x) = x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ có duy nhất một nghiệm dương: loại. <i>Trường hợp 1.4:</i> $B + C = 10$. Do $BC > 9$ và (*) nên $(B, C) \in \{(6, 4); (4, 6); (5, 5)\}$. Với $(B, C) \in \{(6, 4); (4, 6)\}$: không thỏa mãn điều kiện (2) do $3 \cdot 6 > 4^2$. Đối với $B = C = 5$. Khi đó $P(x) = x^3 - 5x^2 + 5x - 1$ có nghiệm hữu tỷ $x = 1$: loại. Trường hợp 2: Giả sử $AD = 2$. Suy ra $A + D = 3, B + C \leq 9, BC > 9AD = 18$. Theo AM-GM, ta phải có $B + C \geq 2\sqrt{BC} \geq 2\sqrt{19} > 8$. Vì vậy $B + C = 9$, suy ra $BC \leq \frac{9^2}{4}$. Dẫn tới $BC \in \{19; 20\}$. Dễ thấy trường hợp $BC = 19$ không thỏa mãn. Vì vậy ta phải có $BC = 20, B + C = 9$, suy ra (B, C) là một hoán vị của $(4, 5)$, trong khi (A, D) là một hoán vị của $(1, 2)$. Để bất đẳng thức (1) được thỏa mãn, ta thấy chỉ có thể xảy ra các khả năng sau: $(A, B, C, D) = (1, 4, 5, 2)$ hoặc $(2, 5, 4, 1)$. Tuy nhiên, trong hai trường hợp này, hai đa thức $P_1(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ và $P_2(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ đều có nghiệm hữu tỷ $x = 1$: loại. Như vậy ta phải có $S = A + B + C + D \geq 13$. Ta đưa ra ví dụ với $S = 13$. Xét $(A, B, C, D) = (1, 5, 6, 1)$, khi đó $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 1.$ Do $P(0) = -1 < 0, P(1) = 1 > 0, P(2) = -1 < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$, nên theo định lý Bolzano, đa thức bậc ba $P(x)$ có đúng 3 nghiệm dương phân biệt x_1, x_2, x_3, với $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3$. Rõ ràng, theo tiêu chuẩn Eisenstein, $P(x)$ không có nghiệm hữu tỷ vì hệ số tự do của đa thức monic $P(x)$ bằng -1, hơn nữa $P(\pm 1) \neq 0$. Vậy $S_{\min} = 13$.
7 (7,0 điểm)	<i>a</i> Chọn $m = 18$. Khi đó Mario sẽ nhảy xa được đúng một lần với độ dài $b = 14$ (mét). Cần phải di chuyển thêm $18 - 14 = 4$ (mét), không đủ cho một lần nhảy với độ dài $a = 6$ (mét), nên Mario cần phải nhảy thêm 4 lần, mỗi lần với độ dài 1 mét. Vì vậy Mario phải nhảy đúng 5 lần. Trong khi đó, có cách khác chỉ sau 3 lần nhảy, mỗi lần với độ dài 6 mét để đến đích với khoảng cách 18 mét, và do đó Mario sẽ thua.

b Ta gọi một cặp (a, b) là Tốt, nếu Mario luôn thắng với mọi số nguyên dương m . Trong trường hợp ngược lại, tức là nếu tồn tại một số nguyên dương m sao cho Mario thua, thì ta nói (a, b) là Không tốt.

Bổ đề. Cặp (a, b) là không tốt khi và chỉ khi tồn tại số nguyên $n \geq 2$ sao cho

$$(n-1)a < b \leq n(a-1).$$

Chứng minh bổ đề.

Điều kiện đủ. Giả sử $(n-1)a < b \leq n(a-1)$. Rõ ràng khi đó $a > n$. Cho $m = na$, khi đó Mario sẽ nhảy một lần với độ dài b mét. Khoảng cách còn lại cần phải di chuyển là $na - b \in [n; a)$, nên Mario sẽ phải nhảy thêm ít nhất n lần, mỗi lần 1 mét. Tổng cộng Mario phải nhảy ít nhất $n+1$ lần. Tuy nhiên có cách khác đến đích với n lần nhảy, mỗi lần a mét, do đó Mario sẽ thua.

Điều kiện cần. Giả sử (a, b) là một cặp không tốt, do đó có cách nhảy đến đích với số lần nhảy ít hơn cách của Mario. Gọi số lần nhảy tương ứng $(b, a, 1)$ mét của Mario là (x_1, y_1, z_1) , $x_1 \geq 0, y_1 \geq 0, z_1 \geq 0$. Suy ra tồn tại một bộ (x_2, y_2, z_2) khác gồm các số nguyên không âm thỏa mãn

$$\begin{cases} x_1 b + y_1 a + z_1 = x_2 b + y_2 a + z_2 \\ x_1 + y_1 + z_1 > x_2 + y_2 + z_2 \\ x_1 \geq x_2 \end{cases}.$$

Từ các hệ thức trên suy ra $(x_1 - x_2)b + (y_1 - y_2)a = z_2 - z_1 < (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)$.

Do đó $(y_1 - y_2)(1-a) > (x_1 - x_2)(b-1) \geq 0$. Vì $a > 1$ suy ra $y_1 < y_2$.

Ngoài ra không thể xảy ra trường hợp $x_1 = x_2$, vì khi đó ta phải có đánh giá $z_1 - z_2 = (y_2 - y_1)a > a$, dẫn tới $z_1 > a$: mâu thuẫn với cách chơi của Mario.

Vì vậy ta có hệ thức $(x_1 - x_2)b + (z_1 - z_2) = (y_2 - y_1)a$.

Đặt $t = x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}^+$, $u = y_2 - y_1 \in \mathbb{Z}^+$, $v = z_1 - z_2 \in \mathbb{Z}$. Suy ra $\begin{cases} tb + v = ua \\ t + v > u \end{cases}$.

Theo cách nhảy xa của Mario, ta có $v = z_1 - z_2 \leq z_1 < a$. Do đó

$$ua - a < ua - v = tb < ua + t - u,$$

dẫn tới $(u-1)a < tb < u(a-1) + t$. Chia cả hai vế cho $t > 0$ ta nhận được

$$\frac{u-1}{t}a < b < \frac{u}{t}(a-1) + 1.$$

Đặt $\left\lceil \frac{u}{t} \right\rceil = n \in \mathbb{Z}^+$, suy ra $(n-1) < \frac{u-1}{t}$ và $\frac{u}{t} \leq n$. Do b là số nguyên dương, ta suy ra

$(n-1)a < b \leq n(a-1)$. Do $n \geq \frac{b}{a-1} > 1$ nên $n \geq 2$. Bổ đề được chứng minh.

Bây giờ, với mỗi $b \geq 3$ cố định, ta đếm số cặp (a, b) tốt. Từ Bổ đề trên ta thấy rằng (a, b) là không tốt khi và chỉ khi tồn tại số nguyên $n \geq 2$ sao cho $\frac{b}{n} + 1 \leq a < \frac{b}{n-1}$.

Vì $(n-1)a < n(a-1)$ suy ra $n < a$. Từ đó với (a, b) là không tốt, phải có $n(n-1) < b$.

Gọi l là số nguyên dương sao cho $l(l-1) < b \leq l(l+1)$. Khi đó $2 \leq n \leq l$. Vì vậy cặp (a, b) là không tốt khi và chỉ khi $2 \leq a < b$ và $a \in S$, ở đó tập S là hợp của $(l-1)$ khoảng đôi một không giao nhau sau đây:

$$S = \left[\frac{b}{l} + 1; \frac{b}{l-1} \right) \cup \left[\frac{b}{l-1} + 1; \frac{b}{l-2} \right) \cup \dots \cup \left[\frac{b}{3} + 1; \frac{b}{2} \right) \cup \left[\frac{b}{2} + 1; b \right).$$

Do đó cặp (a, b) là tốt khi và chỉ khi $1 < a < b$ và $a \notin S$. Dễ thấy với mọi k , $3 \leq k \leq l$, có duy nhất một số nguyên dương $a = \left\lceil \frac{b}{k-1} \right\rceil$ nằm giữa hai khoảng liên tiếp $\left[\frac{b}{k-1} + 1; \frac{b}{k-2} \right)$, $\left[\frac{b}{k} + 1; \frac{b}{k-1} \right)$ và không thuộc hai khoảng này.

Tổng cộng có $(l-2)$ số a như vậy. Ngoài ra, có $\left\lceil \frac{b}{l} \right\rceil - 1$ số a thỏa mãn $1 < a < \frac{b}{l} + 1$. Với một số $b \leq 100$ cố định, có $\left\lceil \frac{b}{l} \right\rceil - 1 + (l-2) = \left\lceil \frac{b}{l} \right\rceil + (l-3) =: K(b)$ cặp (a, b) tốt.

Nhận thấy $K(b) = \begin{cases} l+l-3=2l-3, & l(l-1) < b \leq l^2 \\ l+1+l-3=2l-2, & l^2 < b \leq l(l+1) \end{cases}$. Suy ra $K(b) = \left\lceil 2\sqrt{b} \right\rceil - 3$.

Do đó số cặp tốt với $1 < a < b \leq 100$ là $T = \sum_{b=3}^{100} (\left\lceil 2\sqrt{b} \right\rceil - 3)$.

Nhận xét rằng với $91 \leq b \leq 100$, $\left\lceil 2\sqrt{b} \right\rceil = 20$. Do đó

$$T = (20-3) \cdot 10 + \sum_{b=3}^{90} (\left\lceil 2\sqrt{b} \right\rceil - 3).$$

Đặt $\left\lceil 2\sqrt{b} \right\rceil = c$, suy ra $4 \leq c \leq 19$. Với mỗi số c cố định, ta có $\left\lceil 2\sqrt{b} \right\rceil = c$ tương đương với $c-1 < 2\sqrt{b} \leq c \Leftrightarrow \frac{(c-1)^2}{4} < b \leq \frac{c^2}{4}$. (*)

Bằng cách xét tính chẵn lẻ của c , ta thấy có tất cả $\left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$ số b thỏa mãn (*) với mỗi số c cố định. Vì vậy, nếu đặt $d = \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor$, ta có

$$\begin{aligned} T &= 170 + \sum_{c=4}^{19} (c-3) \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor = 170 + \sum_{d=2}^9 (2d-3)d + \sum_{d=2}^9 (2d-2)d \\ &= 170 + \sum_{d=2}^9 (4d-5)d = 170 + 4 \sum_{d=2}^9 d^2 - 5 \sum_{d=2}^9 d = 170 + 4 \sum_{d=1}^9 d^2 - 5 \sum_{d=1}^9 d - 4 + 5 \\ &= 171 + 4 \cdot \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} - 5 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 171 + 1140 - 225 = 1086. \end{aligned}$$

Đáp số: 1086 cặp.

----- HẾT -----