HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN
VÙNG DH&ĐB BẮC BỘ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
LẦN THỨ XVI, NĂM 2025
ĐỀ THI MÔN: TOÁN - LỚP 10
Ngày thi: 21 tháng 4 năm 2025
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)
(Đề thi gồm 05 câu, trong 01 trang)

Câu 1 (4,0 điểm). Xét hàm số $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(xy + f(f(f(x+y)))) = x + y - xy \text{ với mọi } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Chứng minh f là đơn ánh.

b) Tìm tất cả các hàm số f thoả mãn điều kiện trên.

Câu 2 (4,0 điểm). Xét các số thực x, y, z khác 1, thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$x + y + z = 3 \quad \text{và} \quad xyz = 1. \qquad (*)$$

a) Chứng minh rằng $\max\{x, y, z\} \geq 4$.

b) Tìm số nguyên dương $k \geq 2$ nhỏ nhất sao với mọi x, y, z khác 1 thỏa mãn các điều kiện (*) thì luôn có căn bậc k của các số $|x|, |y|$ và $|z|$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Câu 3 (4,0 điểm). Trên đường tròn (O), cho dây cung BC cố định, khác đường kính và điểm A thay đổi thuộc (O) sao cho tam giác ABC nhọn, không cân. Gọi H là trực tâm và BD, CE là các đường cao của tam giác ABC với D thuộc AC, E thuộc AB. Dựng các hình bình hành $ADGE$, $ADBP$, $AECQ$ và $ABKC$.

a) Chứng minh rằng khi A thay đổi, điểm G luôn di chuyển trên một đường tròn cố định.

b) Giả sử PQ cắt BC ở T và BD, CE cắt AT theo thứ tự ở S, R. Chứng minh rằng KR, KS tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác HRS.

Câu 4 (4,0 điểm). Tìm tất cả các số nguyên dương lẻ $m > 1$ thoả mãn: với bất kỳ các số x, y nguyên và n nguyên dương lớn hơn 1, nếu $x^{2^n} \equiv y^{2^n} \pmod{m}$ thì ta có $x \equiv y \pmod{m}$ hoặc $x \equiv -y \pmod{m}$.

Câu 5 (4,0 điểm). Cho bảng ô vuông 8×8 có các hàng được đánh số từ 1 đến 8 (từ trên xuống) và các cột được đánh số từ 1 đến 8 (từ trái sang). Ta cần tô màu đúng 7 ô vuông nào đó của bảng.

a) Đếm số cách tô màu sao cho chỉ có đúng một ô vuông của bảng mà trên hàng và cột chứa nó, không có ô nào được tô màu (kể cả nó).

b) Chứng minh rằng với mọi cách tô màu (không nhất thiết thoả mãn điều kiện ở câu a), luôn tồn tại một hình vuông con 2×2 của bảng mà trên đó, có đúng một ô được tô màu.

HẾT

Họ và tên thí sinh:.. *Số báo danh:*.....................

Lưu ý: Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu; cán bộ coi thi **không** giải thích gì thêm.

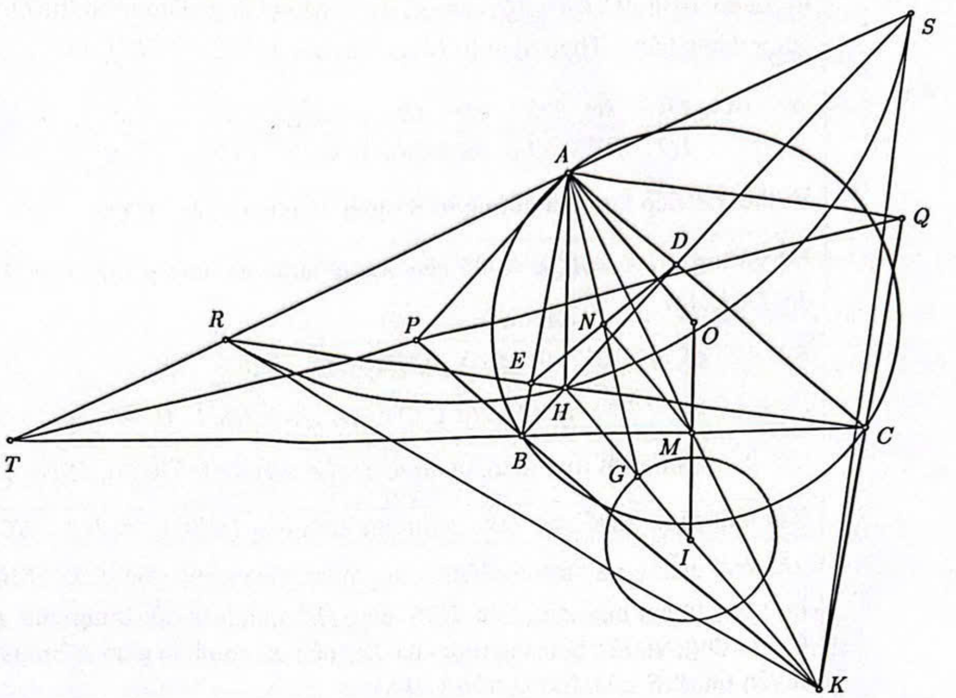
HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN
VÙNG DH&ĐB BẮC BỘ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
LẦN THỨ XVI, NĂM 2025
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN - LỚP 10
(Gồm có 06 trang)

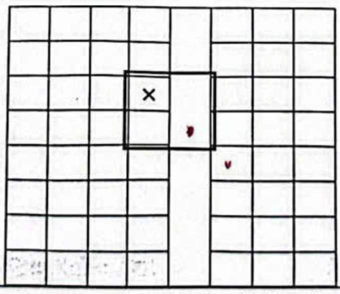
HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 ***(4,0 điểm)***	Xét hàm số hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thoả mãn $$f(xy+f(f(f(x+y))))=x+y-xy \text{ với mọi } x,y\in\mathbb{R}.$$ a) Chứng minh rằng f là đơn ánh. b) Tìm tất cả các hàm số f thoả mãn điều kiện trên.	
	a) Trong đề bài, cho $y=0,$ ta có $f(f(f(f(x))))=x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ (*).	~~0,5~~ 1
	Giả sử có $a,b\in\mathbb{R}$ mà $f(a)=f(b)$ thì $f(f(f(f(a))))=f(f(f(f(b))))$ nên từ (*), ta được $a=b,$ tức là f đơn ánh.	**0,5**
	b) Trong đề bài, cho $y=1,$ ta có $f(x+f(f(f(x+1))))=1$. Vì tính đơn ánh của f nên tồn tại hằng số c để $$x+f(f(f(x+1)))=c-1.$$ Lại thay $x\to x-1$ thì $f(f(f(x)))=c-1-(x-1)=c-x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.	**1,0**
	Tiếp tục tính f hai vế của đẳng thức cuối và dùng (*), ta được $$f(c-x)=f(f(f(f(x))))=x.$$ Vì thế nên $f(x)=c-x$ với mọi $x\in\mathbb{R}$.	**1,0**
	Thử lại, ta có $f(f(x))=c-(c-x)=x$ nên $f(f(f(x+y)))=c-(x+y)$. Do đó với mọi $x,y\in\mathbb{R}$, $f(xy+f(f(f(x+y))))=f(xy+c-x-y)=c-(xy+c-x-y)=x+y-xy.$ Vậy tất cả các hàm số cần tìm là $f(x)=c-x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ và c là hằng số.	0,5 ~~1,0~~
Câu 2 ***(4 điểm)***	Xét các số thực x,y,z khác 1, thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$ và $xyz=1$ (*). a) Chứng minh rằng $\max\{x,y,z\}\geq 4$. b) Tìm số nguyên dương $k\geq 2$ nhỏ nhất sao với mọi x,y,z khác 1 thỏa mãn các điều kiện (*) thì luôn có căn bậc k của các số $\lvert x\rvert,\lvert y\rvert$ và $\lvert z\rvert$ là độ dài ba cạnh của tam giác.	
	a) Giả sử $\max\{x,y,z\}=x$, do $x+y+z=3$ nên $x>1$. Ta có $y+z=3-x$	**1,0**

	và $yz=\dfrac{1}{x}$. Mặt khác $(y+z)^2\ge 4yz$ nên suy ra $(3-x)^2\ge\dfrac{4}{x}$. 0,5 Biến đổi tương đương được $(x-1)^2(x-4)\ge 0$ nên $x\ge 4$. 0,5	
	b) Vẫn xét x lớn nhất thì $x\ge 4, yz>0$. Mặt khác, nếu $x,y,z>0$ thì theo bất đẳng thức AM-GM, ta có $x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$ và đẳng thức phải xảy ra, kéo theo $x=y=z=1$, không thỏa mãn.	0,5
	Tiếp theo, ta xét $y,z<0$ và đặt $u=-y>0$, $v=-z>0$. Ta viết lại các điều kiện (*) đã cho thành $x=3+u+v$ và $xuv=1$. Do đó, x luôn lớn hơn tổng của hai số còn lại nên ta cần tìm k sao cho $$\sqrt[k]{x}<\sqrt[k]{u}+\sqrt[k]{v}.$$	0,5
	Thay $(x,u,v)=\left(4,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ vào bất đẳng thức trên thì $\sqrt[k]{4}<\dfrac{2}{\sqrt[k]{2}}$ hay $\sqrt[k]{8}<2$. Từ đó ta có $k>3$ hay $k\ge 4$.	0,5
	Ta sẽ chứng minh rằng $k=4$ thỏa mãn điều kiện đã cho, tức là $$\sqrt[4]{x}<\sqrt[4]{u}+\sqrt[4]{v} \text{ hay } \sqrt{x}<\sqrt{u}+\sqrt{v}+2\sqrt[4]{uv}=\sqrt{u}+\sqrt{v}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}.$$	0,5
	Ta sẽ chứng minh đánh giá chặt hơn là $\sqrt{x}<\sqrt{u}+\sqrt{v}+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ hay $\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}<\sqrt{u}+\sqrt{v}$.	0,5
	Vì $x\ge 4$ nên $\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}>0$ và bình phương lên có $x+\dfrac{4}{x}-4<u+v+2\sqrt{uv}$ hay $\dfrac{4}{x}<1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$. Đánh giá cuối đúng vì $x\ge 4$. Vì thế nên số nguyên dương nhỏ nhất thoả mãn là $k=4$.	0,5
Câu 3 ***(4,0 điểm)***	Trên đường tròn (O), cho dây cung BC cố định, khác đường kính và điểm A thay đổi thuộc (O) sao cho tam giác ABC nhọn, không cân. Gọi H là trực tâm và BD, CE là các đường cao của tam giác ABC với D thuộc AC, E thuộc AB. Dựng các hình bình hành $ADGE, ADBP, AECQ$ và $ABKC$. a) Chứng minh rằng khi A thay đổi, G luôn di chuyển trên đường tròn cố định. b) Giả sử PQ cắt BC ở T và BD, CE cắt AT theo thứ tự ở S, R. Chứng minh rằng KR, KS tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác HRS.	

		
	a) Gọi M là trung điểm BC và N là trung điểm chung của DE, AG. Lấy I đối xứng O qua M thì I cố định. Do $AH = 2MO = IO$ và $AH \parallel MO$ nên tứ giác $AHIO$ là hình bình hành.	0,5
	Ta có $GE \parallel AD$ nên $GE \perp HD$. Tương tự, $GD \perp HE$ nên H là trực tâm của tam giác GDE, kéo theo $HG \perp DE$. Ta cũng có $AO \perp DE$ nên $HG \parallel AO$. Từ đây suy ra H, G, I thẳng hàng nên $IG \parallel AO$. Đến đây ta có 2 cách giải như sau:	0,5
	Cách 1: Vì DE đối song trong tam giác ABC và AN là trung tuyến của tam giác ADE nên cũng là đối trung trong tam giác ABC. Suy ra AG đi qua giao điểm S của hai tiếp tuyến tại B, C của (O). Vì $IG \parallel AO$ nên theo định lý Thales thì $\dfrac{IG}{AO} = \dfrac{SI}{SO}$ cố định. Do đó, độ dài IG cố định nên G di chuyển trên đường tròn tâm I, bán kính cố định.	0,5 1,0 0,5
	Cách 2: Ta có $MD = ME = \frac{1}{2}BC$ nên tam giác MDE cân ở M và $MN \perp DE$. Do đó $MN \parallel AO$. Từ đó kéo theo tứ giác $AOIG$ là hình thang nhận MN là đường trung bình. Mặt khác, $DME = 2DBE = 2(90° - BAC)$ cố định. Vì thế MN là đường cao trong tam giác MDE cân có cạnh bên và góc ở đỉnh cố định nên độ dài MN cố định. Ta có $$MN = \frac{AO + IG}{2} \text{ hay } IG = 2MN - AO \text{ cố định.}$$ Từ đây ta cũng có kết luận như trên.	0,5 1,0 0,5

	b) Ta có $BP \parallel AC, KB \parallel AC$ nên P, B, K thẳng hàng. Tương tự thì Q, C, K cũng thẳng hàng. Theo định lý Menelaus cho tam giác KPQ thì $$\frac{TP}{TQ} = \frac{BP}{BK} \cdot \frac{CK}{CQ} = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AB}{AE} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 = \left(\frac{BD}{CE}\right)^2 = \left(\frac{AP}{AQ}\right)^2.$$ Vì thế TA tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ.	0,5
	Để ý rằng $APK = AQK = 90^\circ$ nên M là tâm của đường tròn (APQ). Do đó $TA \perp AM$.	0,5
	Kẻ $Ax \parallel BC, Hy \parallel AT$ thì ta có $A(Mx, BC) = -1$ mà $$HA \perp Ax, Hy \perp AM, HR \perp AB, HS \perp AC$$ nên theo tính chất trực giao, ta được $H(yA, RS) = -1$. Do đó, $AR = AS$.	0,5
	Xét tam giác HBC có HK là đường kính của (HBC) và $HA \perp BC$ nên HA, HK đẳng giác trong BHC, cũng đẳng giác trong góc RHS. Mà HA là trung tuyến của tam giác HRS nên HK chính là đối trung của HRS. Cuối cùng, vì KA là trung trực của RS nên K chính là giao điểm hai tiếp tuyến tại R, S của đường tròn (HRS).	0,5
	Ghi chú: Để chứng minh TA tiếp xúc với (APQ), ta cũng có thể cho AH cắt lại đường tròn (KPQ) ở L rồi chỉ ra tứ giác $APLQ$ điều hoà là được.	
Câu 4 *(4 điểm)*	Tìm tất cả các số nguyên dương lẻ $m > 1$ thoả mãn: với mọi số nguyên x, y, n và $n > 1$, nếu $x^{2^n} \equiv y^{2^n} \pmod{m}$ thì $x \equiv y \pmod{m}$ hoặc $x \equiv -y \pmod{m}$.	
	Ta quy ước gọi các số nguyên thoả mãn điều kiện đã cho là số "tốt". Xét $m = p$ là số nguyên tố p có dạng $4k-1, k \in \mathbb{Z}^+$ và giả sử có $$p \mid x^{2^n} - y^{2^n} = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4) \cdots (x^{2^{n-1}} + y^{2^{n-1}}).$$ Nếu tồn tại $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ mà $p \mid x^{2^i} + y^{2^i} = (x^{2^{i-1}})^2 + (y^{2^{i-1}})^2$ thì theo tính chất quen thuộc của số nguyên tố dạng $4k-1$, sẽ có $p \mid x^{2^{i-1}}, p \mid y^{2^{i-1}}$ và như thế $x \equiv y \equiv 0 \pmod{p}$. Còn nếu $p \mid x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ thì phải có $p \mid x+y$ hoặc $p \mid x-y$ nên $x \equiv \pm y \pmod{p}$. Do đó, các số nguyên tố dạng này đều tốt.	1,5
	Giả sử có số tốt m là hợp số. Đặt $m = ab$ với $1 < b \le a < m$ và a, b là các số nguyên lẻ. Chọn $x = \frac{a+b}{2}, y = \frac{a-b}{2}$ thì $$x^2 - y^2 = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = ab = m.$$ Do đó $m \mid x^2 - y^2$ nên $m \mid x^{2^n} - y^{2^n}$, lúc này phải có $x \equiv y \pmod{m}$ hoặc $x \equiv -y \pmod{m}$. Điều này kéo theo $m \mid a$ hoặc $m \mid b$, đều vô lý. Vì thế, các hợp số đều không thoả mãn.	1,5

	Cuối cùng, xét $m=p$ là số nguyên tố có dạng $4k+1, k\in\mathbb{Z}^+$. Khi đó tồn tại số nguyên x sao cho $p\mid x^2+1$. Như vậy với mọi $n>1$, ta luôn có $p\mid x^{2^n}-1^{2^n}$ nên $x\equiv\pm1 \pmod p$, dẫn đến $0\equiv x^2+1\equiv 2 \pmod p$, vô lý. Như thế, các số nguyên tố $p=4k+1$ không là số tốt. Vậy tất cả các số cần tìm là số nguyên tố có dạng $4k-1, k\in\mathbb{Z}^+$.	1,0
	Ghi chú: ở bước chứng minh hợp số không thoả mãn, ta có thể xây dựng cặp (x,y) phản ví dụ bằng cách xét các ước nguyên tố rồi dùng định lý thặng dư Trung Hoa.	
	Cho bảng ô vuông 8×8 có các hàng được đánh số từ 1 đến 8 (từ trên xuống), các cột được đánh số từ 1 đến 8 (từ trái sang). Ta cần tô màu đúng 7 ô vuông của bảng. a) Đếm số cách tô màu sao cho chỉ có đúng một ô vuông của bảng mà trên hàng và cột chứa nó, không có ô nào được tô màu (kể cả nó). b) Chứng minh rằng với mọi cách tô (không nhất thiết thoả mãn điều kiện ở câu a), luôn tồn tại một hình vuông con 2×2 của bảng mà trên đó, có đúng một ô được tô.	
	a) Ta gọi một hàng/cột mà không có ô nào được tô màu là hàng/cột trống. Vì chỉ tô màu 7 ô nhưng có đến 8 hàng, 8 cột nên luôn có ít nhất một hàng trống và một cột trống. Bây giờ nếu có 2 ô được tô màu mà cùng hàng thì sẽ có ít nhất 2 hàng trống, kéo theo giao của chúng với cột trống sẽ tạo thành 2 ô mà trên hàng và cột chứa chúng đều trống, không thoả mãn. Vì thế, các ô được tô màu phải thuộc các hàng phân biệt. Tương tự, chúng cũng phải thuộc các cột phân biệt.	1,0
	Chọn ô vuông thuộc hàng và cột trống thì có 64 cách. Trên 7 hàng còn lại, ta có lần lượt $7,6,5,4,3,2,1$ cách chọn ô để tô màu (ô chọn sau sẽ không cùng cột với ô đã tô trước để không có hai ô cùng cột được tô màu) nên tổng số cách tô màu cần tìm sẽ bằng $64\times7!$. ?	1,0
Câu 5 ***(4,0 điểm)***	b) Giả sử phản chứng rằng mỗi bảng ô vuông 2×2 đều không chứa đúng 1 ô được tô màu. Rõ ràng cũng phải có một cột trống, ta giả sử là cột thứ i với $1\le i\le 8$. Ta xét cột bên trái (nếu có) của cột thứ i này, tức là cột thứ $i-1$. Nếu trên cột thứ $i-1$ đó, có một ô nào đó được tô như hình bên dưới (có đánh dấu $\times$): 	1,0
	Ta xét hình vuông 2×2 tương ứng chứa 2 ô trên cột i (là hai ô không được tô màu) và chứa luôn ô $\times$. Như vậy, ô còn lại ở cột $i-1$ cũng phải được tô vì nếu không thì bảng 2×2 đó chỉ chứa đúng 1 ô được tô màu, mâu thuẫn với điều giả sử. Tiếp tục như thế, cứ xét các hình vuông chứa 2 ô trên cột i và chứa thêm ô được tô màu nào đó ở cột $i-1$ thì bằng lập luận tương tự, ô còn lại cũng	1,0

$64.7^2.6^2.5^2.4^2 \ldots / 7! = \boxed{64.7!}$

64 − 15 = 49

32 − 4 = 28

	được tô. Điều này cho thấy cả cột $i-1$ phải được tô màu toàn bộ, tức là có đến 8 ô được tô màu, vô lý. Từ đó, suy ra cột $i-1$ là một cột trống. Lập luận tương tự thì cột $i+1$ cũng thế. Từ đó, ta mở rộng tiếp cho các cột $i-2, i-3, \ldots, 1$ và các cột $i+2, i+3, \ldots, 8$ cũng đều là các cột trống. Do đó, toàn bộ bảng không được tô màu, cũng lại có điều vô lý. Vì thế nên điều giả sử ban đầu là sai và phải có ít nhất một hình vuông 2×2 thoả mãn đề bài.	

Lưu ý. Các bài toán ở đây có thể có nhiều cách giải. Ban giám khảo căn cứ tình hình để cho điểm nếu thí sinh làm khác cách giải của hướng dẫn chấm thi.