HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN
VÙNG DH&ĐB BẮC BỘ

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
LẦN THỨ XVI, NĂM 2025
ĐỀ THI MÔN: TOÁN - LỚP 11
Ngày thi: 21 tháng 4 năm 2025
Thời gian làm bài: 180 phút (không kể thời gian phát đề)
(Đề thi gồm 05 câu, trong 01 trang)

Câu 1 (4,0 điểm). Với $a, b \in \mathbb{R}$, xét dãy số (u_n) có $u_1 = 3$, $u_2 = a$, $u_3 = b$ và với mọi $n \geq 4$,

$$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} - 2u_{n-3}.$$

a) Xác định công thức tổng quát của u_n.

b) Xác định tất cả cặp số (a, b) để dãy số (u_n) đã cho có giới hạn hữu hạn khi $n \to +\infty$.

Câu 2 (4,0 điểm). Xét hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thoả mãn

$$f(f(xy) + 1) = xf(x + f(y)) \text{ với mọi } x, y > 0.$$

a) Chứng minh rằng f là toàn ánh và không tăng trên $(0; +\infty)$.

b) Tìm tất cả hàm f thoả mãn.

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) có đường cao đỉnh A cắt đường tròn đường kính BC ở D, E và trung tuyến đỉnh A cắt đường tròn đường kính BC ở F, G (với D, F nằm trong tam giác ABC). Các đường thẳng DG, FE cắt nhau ở H và các đường thẳng DF, EG cắt nhau ở R. Đường tròn ngoại tiếp tam giác HDE cắt đường tròn (O) tại các điểm S, T mà S nằm cùng phía với A so với BC.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AHR đi qua trung điểm của đoạn DE.

b) Các tia SD, SE theo thứ tự cắt lại đường tròn (O) ở P, Q và BP, CQ cắt DE lần lượt ở K, L. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác TKL tiếp xúc với đường tròn (O).

Câu 4 (4,0 điểm). Với mỗi số nguyên dương n, gọi S_n là tập hợp tất cả các đa thức có dạng

$$P_n(x) = d_k x^k + d_{k-1} x^{k-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$

trong đó $(d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}, d_k)$ là một hoán vị nào đó của tất cả các ước dương của n.

a) Chứng minh rằng với $n = 2^{2025}$, tồn tại ít nhất 2024! đa thức $P_n(x) \in S_n$ sao cho $P_n(x)$ không thể phân tích được thành tích của hai đa thức hệ số nguyên khác hằng.

b) Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương n là ước của 2025^{2024} sao cho mọi đa thức $P_n(x) \in S_n$ đều không có nghiệm hữu tỷ?

Câu 5 (4,0 điểm). Tại một cuộc thi đố vui, có tất cả n học sinh tham gia. Đề bài có tổng cộng 7 câu hỏi (được đánh số từ 1 đến 7) và mỗi học sinh đã giải được 5 câu. Biết rằng trong 6 câu đầu, mỗi câu có 11 bạn giải được, riêng câu cuối thì có số lượng lẻ học sinh giải được.

a) Tìm n, đồng thời xây dựng một ví dụ ứng với giá trị n đó.

b) Chứng minh rằng trong mọi khả năng có thể xảy ra, luôn chọn được 3 học sinh cùng giải được 3 câu giống nhau. Hỏi khẳng định còn đúng không nếu thay 3 học sinh bởi 4 học sinh?

——— **HẾT** ———

Họ và tên thí sinh:.. *Số báo danh:*....................

Lưu ý: Thí sinh **không** được sử dụng tài liệu; cán bộ coi thi **không** giải thích gì thêm.

HỘI CÁC TRƯỜNG THPT CHUYÊN
VÙNG DH&ĐB BẮC BỘ

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI
LẦN THỨ XVI, NĂM 2025
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN - LỚP 11
(Gồm có 07 trang)

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1 ***(4 điểm)***	Với $a,b\in\mathbb{R}$, xét dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=3,\ u_2=a,\ u_3=b$ và với mọi $n\ge 4$ thì $$u_n=2u_{n-1}+u_{n-2}-2u_{n-3}.$$ a) Xác định công thức tổng quát của u_n. b) Xác định tất cả các cặp số (a,b) để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn khi $n\to+\infty$.	
	a) Phương trình đặc trưng của dãy đã cho là $t^3=2t^2+t-2$ và nó có nghiệm là $t=1,t=-1,t=2$. Khi đó, công thức tổng quát của dãy (u_n) sẽ có dạng $$u_n=A\cdot 1^n+B\cdot(-1)^n+C\cdot 2^n \text{ với } A,B,C\in\mathbb{R}.$$	~~0,5~~ 1,0
	Từ ba số hạng đầu của dãy ta được $$\begin{cases}A\cdot 1^1+B\cdot(-1)^1+C\cdot 2^1=u_1\\ A\cdot 1^2+B\cdot(-1)^2+C\cdot 2^2=u_2\\ A\cdot 1^3+B\cdot(-1)^3+C\cdot 2^3=u_3\end{cases} \text{ hay } \begin{cases}A-B+2C=3\\ A+B+4C=a\\ A-B+8C=b\end{cases}$$ Giải hệ này ta được $A=\dfrac{3+2a-b}{2}$, $B=\dfrac{-9+4a-b}{6}$, $C=\dfrac{b-a}{6}$. Từ đó ta được $$u_n=\frac{3+2a-b}{2}+\frac{-9+4a-b}{6}\cdot(-1)^n+\frac{b-a}{6}\cdot 2^n.$$	~~0,5~~ 1,0
	b) Từ $u_1=3$, ta có ngay $A-B+2C=3$. Nếu $C\neq 0$ thì viết lại $$u_n=2^n\left(A\left(\frac{1}{2}\right)^n+B\left(-\frac{1}{2}\right)^n+C\right),$$ rõ ràng $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ hoặc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ tuỳ theo dấu của C, không thoả mãn dãy có giới hạn hữu hạn. Vì thế $C=0$. Khi đó, $u_n=A+B(-1)^n$.	1,0
	Nếu $B\neq 0$ thì giá trị của dãy u_n sẽ gồm $A+B, A-B$ xen kẽ nhau tuỳ theo tính chẵn lẻ của n. Cụ thể ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n}=A+B\neq\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n+1}=A+B$ hay dãy số đã cho không có giới hạn hữu hạn. Vì thế nên $B=0$. Do đó $A=3$ và $u_n=3,\forall n=1,2,3,\dots$ suy ra $a=b=3$.	1,0
	Ngược lại, với $a=b=3$, ta có hệ phương trình	~~1,0~~

	$\begin{cases} A+B+C=3 \\ A-B+2C=3 \\ A+B+4C=3 \end{cases}$ và hệ này có nghiệm duy nhất là $(A,B,C)=(3;0;0)$ hay $u_n=3, \forall n=1,2,3,\ldots$ Từ đó ta có $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=3$. Vậy nên $(a,b)=(3;3)$ là tất cả các cặp số cần tìm.	
Câu 2 *(4 điểm)*	Xét hàm số $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ thoả mãn $$f(f(xy)+1)=xf(x+f(y)) \text{ với mọi } x,y>0.$$ a) Chứng minh rằng f là toàn ánh và không tăng trên $\mathbb{R}^+$. b) Tìm tất cả hàm f thoả mãn.	
	a) Kí hiệu $P(u,v)$ là phép thế $x=u,\ y=v$ vào đẳng thức $$f(f(xy)+1)=xf(x+f(y))$$ Sử dụng phép thế $P\left(\frac{x}{y},y\right)$ ta được: $f(f(x)+1)=\frac{x}{y}f\left(\frac{x}{y}+f(y)\right)$ (1) với mọi $x,\ y>0$. Trong (1), tiếp tục thay $x=1$ và đặt $f(f(1)+1)=c$, ta có $$f\left(\frac{1}{y}+f(y)\right)=cy \text{ với mọi } y>0.$$ Từ đẳng thức trên thay y bởi $\frac{c}{y}$ ta được $f\left(\frac{y}{c}+f(\frac{c}{y})\right)=y$ với mọi $y>0$. Từ đẳng thức này ta được f là toàn ánh.	0,5
	Giả sử tồn tại $0<y_1<y_2$ mà $f(y_1)<f(y_2)$. Ta chọn số x sao cho $\frac{x}{y_1}+f(y_1)=\frac{x}{y_2}+f(y_2)$ hay $z_0=y_1y_2\frac{f(y_2)-f(y_1)}{y_2-y_1}>0$ (điều này luôn chọn được). Trong (1), lần lượt cho $y=y_1, y=y_2$, ta có $$f(f(x)+1)=\frac{x}{y_1}f\left(\frac{x}{y_1}+f(y_1)\right)=\frac{x}{y_2}f\left(\frac{x}{y_2}+f(y_2)\right).$$ Vì theo cách chọn x trên thì $f\left(\frac{x}{y_1}+f(y_1)\right)=f\left(\frac{x}{y_2}+f(y_2)\right)$ nên kéo theo $y_1=y_2$. Điều mâu thuẫn này cho thấy với $0<y_1<y_2$, phải có $f(y_1)\ge f(y_2)$ nên f là hàm không tăng.	1,5
	b) Ta sẽ chứng minh rằng f liên tục trên $(0;+\infty)$. Thật vậy, vì f đơn điệu nên với mỗi $x_0>0$, tồn tại các giới hạn bên trái, bên phải tại x_0 của f, ta đặt $$L=\lim_{x\to x_0^-}f(x),\ R=\lim_{x\to x_0^+}f(x).$$ Vì tính không tăng nên $L\ge R$. Tuy nhiên, nếu $L>R$, ta chọn $a\in(R;L)$ thì	1,0

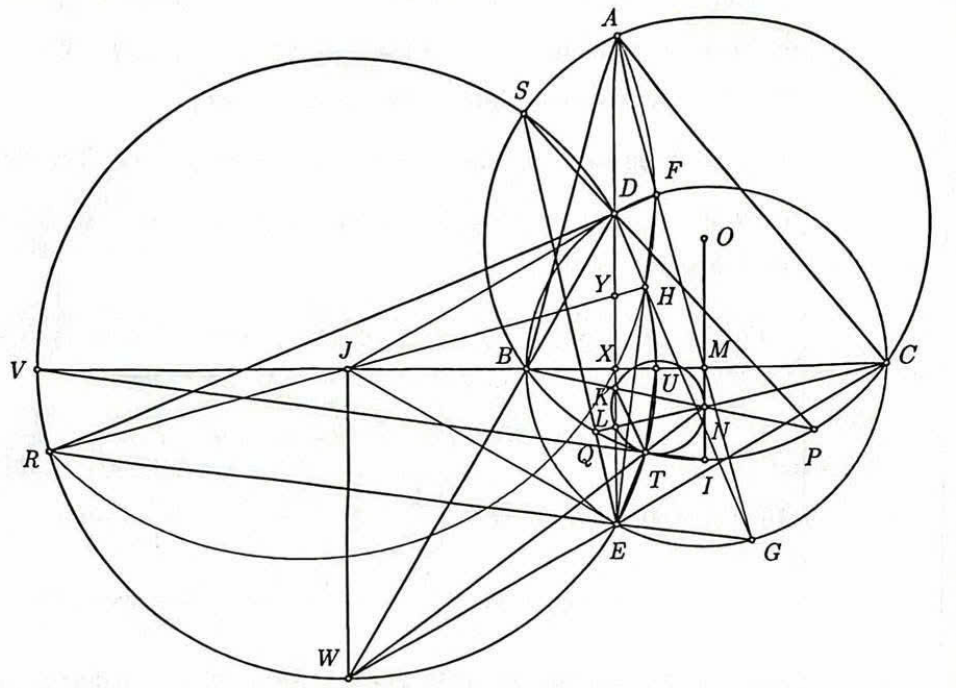
<table>
<tr><td></td><td>rõ ràng $f(x)\ge L,\forall x<x_0$ và $f(x)\le R,\forall x>x_0$ nên không tồn tại $x\in(0;+\infty)$ để $f(x)=a$, mâu thuẫn với tính toàn ánh. Vì thế, phải có $L=R$ nên f liên tục tại x_0, từ đây suy ra được f liên tục trên $(0;+\infty)$.

Vì f liên tục và không tăng nên tồn tại $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=c\ge 0$. Tuy nhiên nếu $c>0$ thì $f(x)\ge c>0,\ \forall x\in(0;+\infty)$, mâu thuẫn với tính toàn ánh. Vì thế $c=0$ hay $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Cuối cùng, trong đề bài, với mỗi $x>0$, cho $y\to+\infty$ thì $f(f(xy)+1)\to f(1)$ và $f(x+f(y))\to f(x)$. Vì thế nên điều kiện đã cho trở thành
$$f(1)=xf(x) \text{ hay } f(x)=\frac{k}{x} \text{ với } k=f(1)>0.$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Thử lại, ta có $f(f(xy)+1)=f\left(\frac{k}{xy}+1\right)=f\left(\frac{k+xy}{xy}\right)=\frac{kxy}{k+xy}$ và
$$xf(x+f(y))=xf\left(x+\frac{k}{y}\right)=xf\left(\frac{k+xy}{y}\right)=\frac{kxy}{k+xy}, \text{ thoả mãn.}$$
Vậy nên tất cả hàm số cần tìm là $f(x)=\frac{k}{x}$ với k là hằng số dương tuỳ ý.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Ghi chú: Nếu học sinh phát biểu đúng tính chất: hàm số toàn ánh, đơn điệu trên $(0;+\infty)$ thì liên tục trên $(0;+\infty)$ mà không chứng minh chi tiết như trên thì vẫn cho điểm.</td></tr>
<tr><td>Câu 3

(4 điểm)</td><td colspan="2">Cho tam giác ABC nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) có đường cao đỉnh A cắt đường tròn đường kính BC ở D,E và trung tuyến đỉnh A cắt đường tròn đường kính BC ở F,G (với D,F nằm trong tam giác ABC). Các đường thẳng DG,FE cắt nhau ở H và các đường thẳng DF,EG cắt nhau ở R. Đường tròn ngoại tiếp tam giác HDE cắt đường tròn (O) tại S,T mà S nằm cùng phía với A so với BC.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AHR đi qua trung điểm của đoạn thẳng DE.

b) Các tia SD,SE theo thứ tự cắt lại (O) ở P,Q và BP,CQ cắt DE lần lượt ở K,L. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác TKL tiếp xúc với (O).</td></tr>
</table>

		
	a) Gọi M là trung điểm BC thì M là tâm đường tròn đường kính BC và vì FG đi qua M nên nó là đường kính (M). Suy ra $GD \perp RF, EF \perp RG$ nên H là trực tâm của tam giác RGF. Từ đó ta thấy R, D, E, H, T cùng thuộc đường trọn đường kính RH, đặt J là tâm đường tròn này.	0,5
	Gọi X là trung điểm DE và cho RH, DE cắt nhau ở Y. Xét tứ giác toàn phần $DEGF.AR$ thì có chùm $R(AH, DE) = -1$ nên có $(DE, AY) = -1$. Theo hệ thức Maclaurin thì $\overline{YX}\cdot\overline{YA} = \overline{YD}\cdot\overline{YE}$. Mặt khác, tứ giác $HDRE$ nội tiếp nên $\overline{YD}\cdot\overline{YE} = \overline{YH}\cdot\overline{YR}$, từ đó có được $\overline{YX}\cdot\overline{YA} = \overline{YH}\cdot\overline{YR}$ nên tứ giác $AHXR$ nội tiếp, tức là (AHR) đi qua trung điểm của DE.	1,0
	b) Ta có DE là dây chung của hai đường tròn $(J),(M)$ nên $JM \perp DE$, mà $DE \perp BC$ nên $J \in BC$. Theo mô hình quen thuộc trong tứ giác toàn phần $DEGF.AR$ thì đường tròn đường kính RH trực giao với $(DEGF)$. Suy ra JD, JE tiếp xúc với (M). Vì thế nên $JS^2 = JT^2 = JD^2 = \overline{JB}\cdot\overline{JC}$, kéo theo JS, JT tiếp xúc với đường tròn (O).	0,5
	Đường tròn (J) cắt BC tại các điểm U, V với U nằm trên đoạn BC. Vì $JV^2 = JU^2 = JD^2 = \overline{JB}\cdot\overline{JC}$ nên $(UV, BC) = -1$ và $SU \perp SV$ kéo theo SU là phân giác trong của BSC, mà $UD = UE$ nên SU cũng là phân giác trong của DSE. Do đó, các tia SP, SQ là đẳng giác trong BSC. Giả sử BP, CQ cắt nhau ở N. Khi đó, $PQ \parallel BC$ và $N \in OM$ là trung trực của BC. Ta có $TBK = TBP = TSP = TSD = TED = TEK$, nên $BETK$ là tứ giác nội tiếp. Tương tự, $CDLT$ cũng là tứ giác nội tiếp.	0,5
	Ta cũng có $DB \perp DC$ nên DB là phân giác góc trong của UDV, kéo theo	0,5

	DB đi qua W, là trung điểm cung UV không chứa D của (J). Tương tự CE cũng đi qua W. Ta có biến đổi góc $$TEC = TDW = TDB \text{ và } TEC + TEB = 90° = TDB + TDC,$$ dẫn đến $TEB = TDC$. Do các tứ giác $TKBE$ và $TLDC$ nội tiếp nên $TKN = TEB$, $TLN = TDC$, suy ra $TKN = TLN$ nên $N \in (TKL)$.	
	Vì $NM \parallel KL$ và NM là phân giác BNC nên tam giác NKL cân tại N và ta có NM tiếp xúc với (NKL). Gọi I là trung điểm cung nhỏ BC thì IN tiếp xúc với $(NTLK)$. Ta có biến đổi góc sau đây $$INT = TKN = TEB = 90° - TEC = 90° - TDW = JWT.$$ Kết hợp với $JW \parallel OI$, ta có ngay N, T, W thẳng hàng. Do đó $$JTW = JWT = TNI = TKN,$$ dẫn đến JT tiếp xúc với (TKL), tức là JT là tiếp tuyến chung của (O) và (TKL) nên hai đường tròn này tiếp xúc nhau ở T.	**1,0**
Câu 4 ***(4 điểm)***	Với mỗi số nguyên dương n, gọi S_n là tập hợp tất cả các đa thức có dạng $$P_n(x) = d_k x^k + d_{k-1} x^{k-1} + \cdots + d_1 x + d_0,$$ trong đõ $(d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}, d_k)$ là một hoán vị nào đó của tất cả các ước dương của n. a) Chứng minh rằng với $n = 2^{2025}$, tồn tại ít nhất 2024! đa thức $P_n(x) \in S_n$ sao cho $P_n(x)$ không thể phân tích được thành tích của 2 đa thức hệ số nguyên khác hằng. b) Hỏi có bao nhiêu số nguyên dương n là ước của 2025^{2024} sao cho mọi đa thức $P_n(x) \in S_n$ đều không có nghiệm hữu tỷ?	
	a) Theo tiêu chuẩn Eisenstein, $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ có hệ số nguyên là bất khả quy nếu tồn tại số nguyên tố p mà $p^2 \nmid a_0, p \nmid a_n$ và $p \mid a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. Ta thấy 2^{2025} có các ước là $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{2025}$ với tổng cộng 2026 ước. Chọn $P_n(x) = x^{2025} + d_{2024} x^{2024} + \cdots + d_1 x + 2$, trong đó $(d_1, d_2, \ldots, d_{2024})$ là hoán vị tuỳ ý của $(2^2, 2^3, \ldots, 2^{2025})$, có tất cả 2024! hoán vị như thế. Các đa thức này đều bất khả quy theo tiêu chuẩn Eisenstein cho $p = 2$.	**1,5**
	Ghi chú: Ta cũng có thể áp dụng tiêu chuẩn Perron khi chọn $d_{2025} = 1, d_{2024} = 2^{2025}$ và hoán vị tuỳ ý cho các hệ số còn lại, chú ý $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{2024} < 2^{2025}$.	
	b) Xét n là ước dương của 2025^{2024} thì n lẻ. Ta sẽ chứng minh 2 nhận xét: (1) Nếu n là số chính phương lẻ, $P_n(x)$ luôn không có nghiệm hữu tỷ. Thật vậy, vì n có lẻ ước nên $\deg P_n(x)$ chẵn và ta có thể đặt $$P_n(x) = d_{2m} x^{2m} + \cdots + d_1 x + d_0.$$	**1,0**

	Giả sử $P_n(x)$ có nghiệm hữu tỷ $\frac{u}{v}$ với $u,v\in\mathbb{Z}, v\neq 0$ và $\gcd(u,v)=1$. Theo tính chất về nghiệm hữu tỷ của đa thức nguyên thì $u\mid d_0$ và $v\mid d_{2m}$, mà các số d_0, d_{2m} đều lẻ nên u,v cũng lẻ. Khi đó $$v^{2m}P\left(\frac{u}{v}\right)=d_{2m}u^{2m}+d_{2m-1}u^{2m-1}v+\cdots+v^{2m-1}d_1u+u^{2m}d_0.$$ Vế phải là tổng của lẻ số lẻ nên khác 0 và $P\left(\frac{u}{v}\right)\neq 0$, mâu thuẫn. Do đó, với n là số chính phương lẻ thì $P_n(x)$ luôn không có nghiệm hữu tỷ.	
	(2) Nếu n không chính phương, có thể giả sử $v_3(n)$ lẻ. Đặt $n=3^{2p+1}\cdot 5^q$ với $p,q\in\mathbb{N}$, chọn $f(x)=(3+x)+(3^3x^2+3^2x^3)+\cdots+(3^{2p+1}x^{2p}+3^{2p}x^{2p+1})$ thì có nghiệm $x=-3$. Xây dựng được $P_n(x)=f(x)\sum_{k=0}^{q}(5x^{2p+2})^k\in S_n$ vì rõ ràng các hệ số của nó sẽ có dạng $3^m5^k, 0\le m\le 2p+1, 0\le k\le q$ là tất cả các ước của n. Đa thức này có nghiệm $x=-3$. Tương tự, nếu $v_5(n)$ lẻ, ta cũng xây dựng được đa thức có nghiệm $x=-5$. Vì thế với các ước dạng này, luôn có đa thức $P_n(x)\in S_n$ mà có nghiệm hữu tỷ, không thoả mãn điều kiện.	1,0
	Từ đó, ta quy về đếm số ước chính phương của $2025^{2024}=3^{4\cdot 2024}\cdot 5^{2\cdot 2024}$, có dạng $3^{2a}\cdot 5^{2b}$ với $0\le a\le 2\cdot 2024$, $0\le b\le 2024$ và chính bằng $$(2\cdot 2024+1)\cdot(2024+1)=4049\cdot 2025.$$	0,5
Câu 5 *(4 điểm)*	Tại một cuộc thi đố vui, có tất cả n học sinh tham gia. Đề có tổng cộng 7 câu hỏi (được đánh số từ 1 đến 7) và mỗi học sinh đã giải được 5 câu. Biết rằng trong 6 câu đầu, mỗi câu có 11 bạn giải được, riêng câu cuối có số lượng lẻ học sinh giải được. a) Tìm n, đồng thời xây dựng một ví dụ ứng với giá trị n đó. b) Chứng minh rằng trong mọi khả năng có thể xảy ra, luôn chọn được 3 học sinh cùng giải được 3 câu giống nhau. Hỏi khẳng định này còn đúng không nếu thay 3 học sinh bởi 4 học sinh?	
	a) Ta đếm bằng hai cách số cặp (a,b) mà học sinh a giải được câu hỏi b. Đếm theo học sinh: chọn a có n cách, chọn b có 5 cách, số cặp là $5n$. Đếm theo câu: với 6 câu đầu, có 11 cách chọn a và giả sử câu cuối có x học sinh giải được thì số cặp sẽ là $6\cdot 11+x=66+x$. Từ đó, ta có được đẳng thức sau: $5n=66+x$.	1,0
	Do x lẻ nên n cũng lẻ. Vì $x\ge 0$ nên $5n\ge 66$ hay $n\ge\frac{66}{5}$ và ta có $n\ge 14$. Mặt khác, $x\le n$ nên $5n\le 66+n$ hay $n\le\frac{66}{4}$ và ta có $n\le 16$. Do đó, ta được $14\le n\le 16$, mà n lẻ nên $n=15$.	0,5
	Ta xét một ví dụ thoả mãn cho bởi bảng sau đây:	0,5

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	×	×	×	×		×	×		×	×		×	×		×
B	×	×	×	×	×		×	×		×	×		×	×	
C	×	×	×		×	×		×	×		×	×		×	×
D	×		×	×	×	×	×	×	×	×	×	×			
E	×	×		×	×	×	×	×	×				×	×	×
F		×	×	×	×	×				×	×	×	×	×	×
G							×	×	×	×	×	×	×	×	×

b) Giả sử phản chứng rằng 3 học sinh bất kỳ thì chỉ giải giống nhau tối đa 2 câu. Ta đếm số lượng S các bộ $(\{a_1,a_2,a_3\},b)$ mà các học sinh a_1,a_2,a_3 cùng giải được câu b. Theo kết quả câu a ta được $n=15, x=9$.

Đếm theo $\{a_1,a_2,a_3\}$ thì có $C_{15}^3=455$ cách, chọn b thì có không quá 2 cách nên ta có $S\le 455\times 2=910$. Mặt khác, đếm theo b thì sẽ xảy ra 2 khả năng: nếu b thuộc vào 6 câu đầu thì số cách chọn $\{a_1,a_2,a_3\}$ là C_{11}^3 và nếu b thuộc vào câu 7 thì số cách chọn $\{a_1,a_2,a_3\}$ là C_9^3, từ đó suy ra số bộ $(\{a_1,a_2,a_3\},b)$ sẽ là $S=6\times C_{11}^3+C_9^3=1074$. Kết hợp hai đánh giá trên, ta có mâu thuẫn. Vậy nên luôn chọn được 3 học sinh mà họ cùng giải được 3 câu giống nhau.

1,0

Tiếp theo, giả sử rằng không có 4 học sinh nào cùng giải được 3 câu giống nhau. Không mất tính tổng quát, giả sử học sinh 1,2,3 cùng giải được các câu A,B,C. Suy ra, 12 học sinh còn lại sẽ giải tối đa 2 trong 3 câu đó. Như vậy, trong 4 câu còn lại, mỗi bạn giải được ít nhất $5-2=3$ câu (do mỗi học sinh giải được 5 câu). Ta có 4 bộ ba câu là

$$(D,E,F),(E,F,G),(F,G,D),(G,D,E).$$

Vì mỗi bộ sẽ được không quá 3 người làm được nên số học sinh sẽ không quá $3\times 4=12$. Dấu bằng phải xảy ra, tức là mỗi bộ ba ở trên sẽ có đúng 3 bạn làm được. Khi đó, rõ ràng hai học sinh bất kỳ trong số 12 bạn này cũng làm chung ít nhất 2 câu trong D,E,F,G.

Mặt khác, mỗi bạn trong 12 còn lại phải làm được thêm đúng 2 câu trong A,B,C. Ta có 3 cặp câu là $(A,B),(B,C),(C,A)$ nên theo nguyên lý Dirichlet, sẽ có một cặp mà ít nhất $\frac{12}{3}=4$ bạn làm được. Như thế, 4 bạn đó có chung 1 câu trong A,B,C và chung 2 câu trong D,E,F,G nên sẽ làm chung 3 câu, mâu thuẫn với điều giả sử. Vậy nên khẳng định vẫn đúng nếu đổi 3 học sinh bởi 4 học sinh.

1,0

Lưu ý. Các bài toán ở đây có thể có nhiều cách giải. Giám khảo căn cứ tình hình để cho điểm nếu thí sinh làm khác cách giải của hướng dẫn chấm thi.