Câu 1 (2 điểm).

Cách giải:

Cho biểu thức $P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{2\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$ ***với*** $x>0, x\neq 1$.

1. Rút gọn biểu thức P.

ĐKXĐ: $x>0, x\neq 1$

$$P=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}+\frac{2\sqrt{x}+1}{x-\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$P=\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}+\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}+\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$P=\frac{x+\sqrt{x}+2\sqrt{x}+1+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$P=\frac{x+4\sqrt{x}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+4\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}$$

2. Tìm tất cả các giá trị của x ***để*** $P<0$.

ĐK: $x>0, x\neq 1$

$P<0$

$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-1}<0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1<0$ (vì $\sqrt{x}+4>0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1<0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x}<1$

$\Leftrightarrow x<1$

Kết hợp với điều kiện ta có: $0<x<1$

Câu 2 (2 điểm).

Cách giải:

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $(d): y=\left(m^2-3\right)x+3$ ***và*** $\left(d'\right): y=6x+m$***. Tìm tất cả các giá trị của*** m ***để hai đường thẳng trên song song với nhau.***

(d) và (d') song song khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2-3=6 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2=9 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m=-3$

Vậy với $m=-3$ thì hai đường thẳng trên song song với nhau.

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+5y=-7 \\ x-4y=11 \end{cases}$.

$$\begin{cases} x+5y=-7 \\ x-4y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y=-18 \\ x-4y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=4y+11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(3;-2)$.

Câu 3 (2 điểm).

Cách giải:

1. Giải phương trình $x^2+6x+5=0$.

Ta có: $x^2+6x+5=0 \Leftrightarrow x^2+x+5x+5=0 \Leftrightarrow x(x+1)+5(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+5)(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có nghiệm là $x \in \{-1;-5\}$.

2. Cho phương trình $x^2-x+4m+2=0$ ***(m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt*** x_1, x_2 ***thỏa mãn hệ thức*** $x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2=5(x_1-x_2)$.

Xét $\Delta=(-1)^2-4.(4m+2)=1-16m-8=-16m-7$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $-16m-7>0 \Leftrightarrow m<\frac{-7}{16}$.

Theo hệ thức Vi-et, ta có:

$$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1x_2=4m+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=1-x_1 \\ x_1x_2=4m+2 \end{cases}.$$

Theo bài ra ta có:

$$x_1^2-4x_1x_2+3x_2^2=5(x_1-x_2)$$
$$\Leftrightarrow x_1-x_1x_2-3x_1x_2+3x_2^2=5(x_1-x_2)$$
$$\Leftrightarrow x_1(x_1-x_2)-3x_2(x_1-x_2)-5(x_1-x_2)=0$$
$$\Leftrightarrow (x_1-3x_2-5)(x_1-x_2)=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_1-3x_2-5=0(1) \\ x_1-x_2=0(2) \end{array}\right.$$

Giải phương trình (1):

$$x_1-3x_2-5=0 \Leftrightarrow x_1-3(1-x_1)-5=0$$
$$\Leftrightarrow x_1-3+3x_1-5=0 \Leftrightarrow 4x_1=8 \Leftrightarrow x_1=2$$
$$\Rightarrow x_2=1-x_1=1-2=-1$$
$$\Rightarrow x_1.x_2=2.(-1)=-2=4m+2 \Rightarrow m=-1(TM)$$

Giải phương trình (2):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 x_2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 4m + 2 \Rightarrow m = \frac{-7}{16}(KTM)$$

Vậy m = -1 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4 (3 điểm).

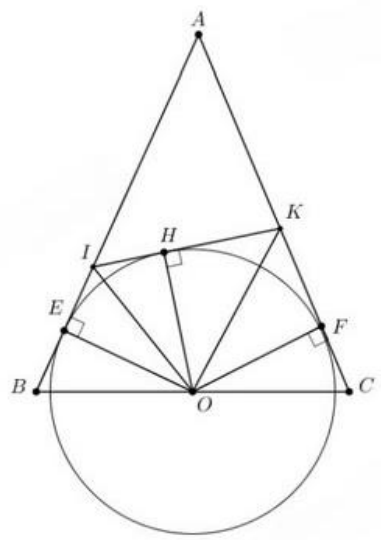
Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi O là trung điểm của cạnh BC. Đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại E, tiếp xúc với AC tại F. Điểm H di động trên cung nhỏ EF của đường tròn (O); tiếp tuyến của đường tròn (O) tại H cắt AB, AC lần lượt tại I, K.

1. Chứng minh AEOF là tứ giác nội tiếp.

2. Chứng minh $\angle IOK = \angle ABC$ và hai tam giác OIB, KOC đồng dạng.

3. Giả sử $AB = 5\,\text{cm}, BC = 6\,\text{cm}$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác AIK.

Cách giải:



1. Chứng minh AEOF là tứ giác nội tiếp.

Do (O) tiếp xúc với AB, AC tại E,F nên AB, AC là tiếp tuyến

$\Rightarrow \angle AEO = \angle AFO = 90^0$

Xét tứ giác AEOF có $\angle AEO + \angle AFO = 90^0 + 90^0 = 180^0$

Mà hai góc này ở vị trí đối diện nên tứ giác AEOF nội tiếp (dhnb)

2. Chứng minh $\angle IOK = \angle ABC$ và hai tam giác OIB, KOC đồng dạng.

Ta có $\angle IOE = \angle IOH = \dfrac{1}{2}\angle EOH$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\angle HOK = \angle KOF = \frac{1}{2}\angle HOF$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \angle IOK = \angle IOH + \angle HOK = \frac{1}{2}(\angle EOH + \angle HOF) = \frac{1}{2}EOF$ (1)

Ta có OB = OC (gt), $\angle B = \angle C$ (ΔABC cân), $\angle BEO = \angle CFO = 90^0$

$\Rightarrow \Delta OBE = \Delta OCF$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow \angle BOE = \angle COF$

$\angle ABC = 90^0 - \angle BOE = \frac{1}{2}\left(180^0 - 2\angle BOE\right) = \frac{1}{2}\left(180^0 - \angle BOE - \angle COF\right) = \frac{1}{2}\angle EOF$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle IOK = \angle ABC$

Ta có $\left.\begin{array}{l}\angle IOK = \angle ABC = \angle ACB \\ \angle IOK + \angle IOB + \angle KOC = 180^0 \\ \angle ACB + \angle CKO + \angle KOC = 180^0\end{array}\right\} \Rightarrow \angle IOB = \angle CKO$

Kết hợp $\angle OBI = \angle OCK \Rightarrow \Delta OBI \sim \Delta KCO(g.g)$

3. Giả sử** $AB = 5\text{cm}, BC = 6\text{cm}$. **Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác AIK.

Câu 5 (1 điểm).

Cho các số thực dương** a,b,c **thỏa mãn** $abc = 1$. **Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^4\left(b^2+c^2\right)}{b^3+2c^3} + \frac{b^4\left(c^2+a^2\right)}{c^3+2a^3} + \frac{c^4\left(a^2+b^2\right)}{a^3+2b^3}.$$

Cách giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy và kết hợp với giả thiết ta có

$$a^4\left(b^2+c^2\right) = a^2\left(a^2b^2+c^2a^2\right) \ge a^2 \cdot 2\sqrt{a^4 \cdot b^2c^2} = 2a^3$$

Hoàn toàn tương tự ta được $b^4\left(c^2+a^2\right) \ge 2b^3; c^4\left(a^2+b^2\right) \ge 2c^3$

Khi đó ta được

$$\frac{a^4\left(b^2+c^2\right)}{b^3+2c^3} + \frac{b^4\left(c^2+a^2\right)}{c^3+2a^3} + \frac{c^4\left(a^2+b^2\right)}{a^3+2b^3} \ge \frac{2a^3}{b^3+2c^3} + \frac{2b^3}{c^3+2a^3} + \frac{2c^3}{a^3+2b^3}$$

Đặt $M = \frac{2a^3}{b^3+2c^3} + \frac{2b^3}{c^3+2a^3} + \frac{2c^3}{a^3+2b^3}$ và $x = b^3+2c^3; y = c^3+2a^3; z = a^3+2b^3$

Khi đó ta được $b^3 = \frac{x-2y+4z}{9}; c^3 = \frac{y-2z+4x}{9}; a^3 = \frac{z-2x+4y}{9}$

Suy ra $M = \frac{2(z-2x+4y)}{9x} + \frac{2(x-2y+4z)}{9y} + \frac{2(y-2z+4x)}{9z}$

$\Leftrightarrow M = \frac{2}{9}\left[\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)+4\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)-6\right]$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy với 3 số dương ta có:

$$\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\ge 3\sqrt[3]{\frac{z}{x}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}}=3;\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\ge 3\sqrt[3]{\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{x}{z}}=3$$

Khi đó ta được $M=\frac{2}{9}\left[\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{y}{z}\right)+4\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\right)-6\right]\ge\frac{2}{9}(3+4.3-6)=2$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 2 khi $a=b=c=1$