

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 02 trang)

Môn thi: Toán (Không chuyên)

Ngày thi: 21/6/2022

Thời gian: 120 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1: (1,0 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức $A = 2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}}$.

b) Rút gọn biểu thức $Q = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{x+6\sqrt{x}+9}{9-x} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ (với $x \geq 0, x \neq 9$).

Bài 2: (1,0 điểm)

a) Giải phương trình: $2x^2 - x - 15 = 0$.

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x}{1-x} + \frac{y}{y+1} = 3 \\ \frac{3x}{1-x} - \frac{y}{y+1} = 1 \end{cases}$$
.

Bài 3: (1,5 điểm) Cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m+1)x + 2$ (m là tham số) và $(d_2): y = -\frac{1}{2}x - \frac{4}{3}$.

a) Tìm m để hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau.

b) Cho $m = -4$, hãy vẽ hai đường thẳng (d_1) và (d_2) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy và tìm tọa độ giao điểm của chúng.

Bài 4: (1,5 điểm) Ngày của Cha hay còn gọi là *Father's Day* là ngày để con bày tỏ lòng biết ơn và hiếu thảo đối với cha mình. Tương tự như Ngày của Mẹ, ngày của Cha cũng không cố định cụ thể mà được quy ước chọn ngày chủ nhật tuần thứ 3 của tháng 6 hàng năm. (Theo Vietnamnet.vn)

Nhân dịp lễ “Ngày của Cha – 19/6/2022”, siêu thị A đã giảm giá 18% cho mỗi đôi giày và 20% cho mỗi chiếc cà vạt. Bạn Duy đã dùng 834 700 đồng để mua một đôi giày và một chiếc cà vạt ở siêu thị A làm quà tặng ba của mình; Duy tính nhầm: cùng ở siêu thị A, cùng số lượng, cùng mẫu mã nhưng nếu mua vào ngày 18/6/2022 (ngày mà siêu thị A không có khuyến mãi giảm giá các mặt hàng) thì chỉ với số tiền tiết kiệm được là 1 025 000 đồng bạn ấy không đủ tiền để mua hai món hàng này. Em hãy cho biết, bạn Duy tính nhầm như vậy có đúng không? Biết rằng, nếu không giảm giá thì tiền mua mỗi đôi giày gấp 11 lần tiền mua mỗi chiếc cà vạt.

Bài 5: (1,5 điểm) Cho phương trình : $x^2 + kx + 2 = 0$. (k là tham số)

a) Tìm k để phương trình có nghiệm kép, tìm nghiệm kép đó.

b) Tìm k để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 23$.

Bài 6: (3,5 điểm) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ sao cho $OA = 2R$. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn $(O; R)$ (B, C là các tiếp điểm), tia AO cắt BC tại I . Điểm H thuộc đoạn thẳng BI (H khác B và H khác I). Đường thẳng d vuông góc với OH tại H ; d cắt AB và AC lần lượt tại P và Q .

a) Chứng minh tứ giác $OHBP$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng: $OP = OQ$.

c) Khi H là trung điểm của đoạn thẳng BI , tính độ dài đoạn thẳng BC và diện tích của $\triangle OPQ$ theo R .

----- Hết -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (1,0 điểm)

a) Tính giá trị của biểu thức: $A = 2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}}$

b) Rút gọn biểu thức: $Q = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{x+6\sqrt{x}+9}{9-x} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$; $x \geq 0, x \neq 9$.

Lời giải

a) $A = 2\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{\sqrt{75}} - 3\sqrt{5\sqrt{48}} = 2\sqrt{40 \cdot 2\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 3\sqrt{5 \cdot 4\sqrt{3}}$
 $= 2 \cdot 4\sqrt{5\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 3 \cdot 2\sqrt{5\sqrt{3}} = 8\sqrt{5\sqrt{3}} - 2\sqrt{5\sqrt{3}} - 6\sqrt{5\sqrt{3}} = 0$
 Vậy $A = 0$

b) Rút gọn biểu thức Q .

Với $x \geq 0, x \neq 9$ ta có

$$\begin{aligned} Q &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{x+6\sqrt{x}+9}{9-x} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+6\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{x+6\sqrt{x}+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{2x+6\sqrt{x}-x-6\sqrt{x}-9-x+3\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0, x \neq 9$ thì $Q = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$.

Câu 2. (1,0 điểm)

a) Giải phương trình $2x^2 - x - 15 = 0$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x}{1-x} + \frac{y}{y+1} = 3 \\ \frac{3x}{1-x} - \frac{y}{y+1} = 1 \end{cases}$

Lời giải

a) $\Delta = (-1)^2 + 4 \cdot 2 \cdot 15 = 121$

$\Delta = 11^2 > 0$

Do đó phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1 = \frac{1+\sqrt{121}}{4} = 3$; $x_2 = \frac{1-\sqrt{121}}{4} = \frac{-5}{2}$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt là: $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{-5}{2}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x}{1-x} + \frac{y}{y+1} = 3 \\ \frac{3x}{1-x} - \frac{y}{y+1} = 1 \end{cases}$

Điều kiện $x \neq 1, y \neq -1$ (*)

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \frac{x}{1-x} \\ b = \frac{y}{y+1} \end{cases} \quad (1)$$

Hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} a+b=3 \\ 3a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a=4 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \quad (2)$

Thay (2) vào (1) ta được $\begin{cases} \frac{x}{1-x}=1 \\ \frac{y}{y+1}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-x \\ y=2(y+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=1 \\ y-2y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-2 \end{cases}$ (thỏa mãn điều

kiện (*))

Vậy hệ phương trình có nghiệm là: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -2 \end{cases}$

Câu 3. (1,5 điểm) Cho hai đường thẳng $(d_1): y = (m+1)x + 2$ (m là tham số) và $(d_2): y = -\frac{1}{2}x - \frac{4}{3}$

a) Tìm m để hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau.

b) Cho $m = -4$, hãy vẽ hai đường thẳng (d_1) và (d_2) trên cùng một mặt phẳng tọa độ Oxy và tìm tọa độ giao điểm của chúng.

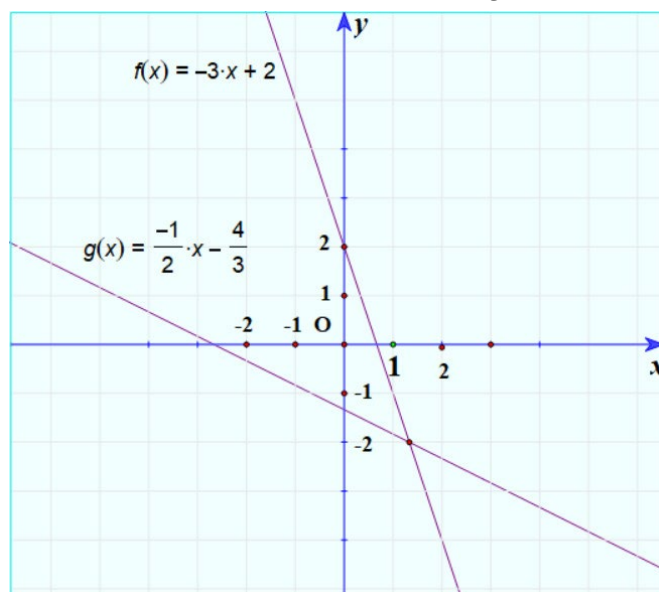
Lời giải

a) Để hai đường thẳng (d_1) và (d_2) cắt nhau thì $m+1 \neq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow m \neq -\frac{3}{2}$ (thỏa mãn)

Vậy với $m \neq -\frac{3}{2}$ thì hai đường thẳng cắt nhau

b) Thay $m = -4$ vào (d_1) ta được: $(d_1): y = -3x + 2$

Vẽ đồ thị của hai hàm số $(d_1): y = -3x + 2$ và $(d_2): y = -\frac{1}{2}x - \frac{4}{3}$ trên cùng mặt phẳng tọa độ.



Phương trình hoành độ giao điểm của $(d_1): y = -3x + 2$ và $(d_2): y = -\frac{1}{2}x - \frac{4}{3}$ là

$$\begin{aligned} -3x + 2 &= -\frac{1}{2}x - \frac{4}{3} \Leftrightarrow -18x + 12 = -8 - 3x \\ \Leftrightarrow -18x + 3x &= -12 - 8 \Leftrightarrow -15x = -20 \quad (1) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Với $x = \frac{4}{3}$ thì $y = -3 \cdot \frac{4}{3} + 2 = -2$, ta được điểm $\left(\frac{4}{3}; -2\right)$

Vậy giao điểm của hai đường thẳng là $\left(\frac{4}{3}; -2\right)$

Câu 4. (1,5 điểm) Ngày của Cha hay còn gọi là Fathers Day là ngày để con bày tỏ lòng biết ơn và hiếu thảo đối với cha mình. Tương tự như Ngày của Mẹ, ngày của Cha cũng không cố định cụ thể mà được quy ước chọn ngày chủ nhật tuần thứ 3 của tháng 6 hàng năm (Theo Vietnamnet.vn).

Nhân dịp lễ “Ngày của Cha – 19/6/2022”, siêu thị A đã giảm giá 18% cho mỗi đôi giày và 20% cho mỗi chiếc cà vạt. Bạn Duy đã dùng 834700 đồng để mua một đôi giày và một chiếc cà vạt ở siêu thị A làm quà tặng ba mình; Duy tính nhầm : cùng ở siêu thị A, cùng số lượng, cùng mẫu mã nhưng nếu mua vào ngày 18/6/2022(ngày mà siêu thị A không có khuyến mại giảm giá các mặt hàng) thì chỉ với số tiền tiết kiệm được là 1025000 đồng bạn ấy không đủ tiền để mua hai món hàng này. Em hãy cho biết, bạn Duy tính nhầm như vậy có đúng không? Biết rằng, nếu không giảm giá thì tiền mua mỗi đôi giày gấp 11 lần tiền mua mỗi chiếc cà vạt.

Lời giải

Gọi x là số tiền đôi giày lúc chưa giảm giá (đồng) ($x > 0$)

Gọi y là số cà vạt lúc chưa giảm giá (đồng) ($y > 0$)

Theo bài ra:

Số tiền mua mỗi đôi giày gấp 11 lần tiền mua mỗi chiếc cà vạt không giảm giá nên ta có phương trình : $x = 11y$ (1)

Ta lại có : giảm giá 18% cho mỗi đôi giày và 20% cho mỗi chiếc cà vạt. Bạn Duy đã dùng 834700 đồng nên ta có phương trình: $\frac{100-18}{100}x + \frac{100-20}{100}y = 834700$ (2)

$$\text{Từ(1) và (2) ta có hệ phương trình: } \begin{cases} x = 11y \\ \frac{100-18}{100}x + \frac{100-20}{100}y = 834700 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta được $x = 935000, y = 85000$

Do đó khi chưa giảm giá số tiền mua đôi giày và cà vạt là: $935000 + 85000 = 1020000$ đồng

Vậy với số tiền 1025000 đồng bạn Duy đủ tiền mua

Câu 5. (1,5 điểm) Cho phương trình $x^2 + kx + 2 = 0$. (k là tham số)

a) Tìm k để phương trình có nghiệm kép, tìm nghiệm kép đó.

b) Tìm k để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thoả mãn $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 23$

Lời giải

Ta có $\Delta = k^2 - 4.1.2 = k^2 - 8$

a) Để phương trình có nghiệm kép thì $\Delta = 0 \Leftrightarrow k^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 2\sqrt{2}$

$$\text{Khi đó } x_1; x_2 = \frac{-k}{2 \cdot 1} = \frac{\mp 2\sqrt{2}}{2} = \pm\sqrt{2}$$

b) Phương trình có hai nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow k^2 - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k \geq 2\sqrt{2} \\ k \leq -2\sqrt{2} \end{cases}$

$$\text{Theo bài ra, ta có : } \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 23 \Leftrightarrow x_1^4 + x_2^4 \geq 23x_1^2x_2^2 \Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2)^2 \geq 25x_1^2x_2^2$$

$$\Leftrightarrow \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 25x_1^2x_2^2 \geq 0$$

Áp dụng định lí Viet ta có : $x_1 + x_2 = -k$; $x_1x_2 = 2$

$$\text{Thay vào ta có : } (k^2 - 4)^2 - 100 \geq 0 \Leftrightarrow (k^2 - 14)(k^2 + 6) \geq 0$$

Vì $k^2 + 6 > 0$ nên $k^2 - 14 < 0 \Leftrightarrow -\sqrt{14} < k < \sqrt{14}$

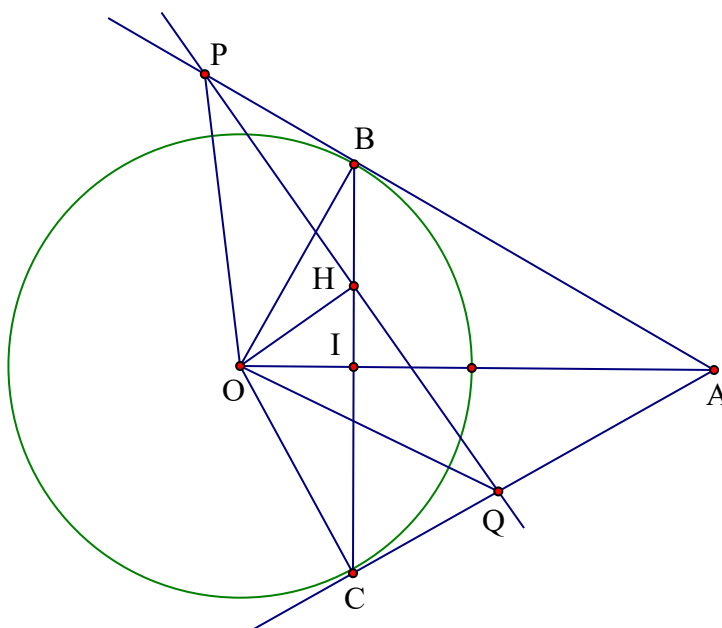
Kết hợp điều kiện, ta được $-\sqrt{14} < k \leq -2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2} \leq k < \sqrt{14}$

Câu 6. (3,5 điểm) Cho điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ sao cho $OA = 2R$. Kẻ hai tiếp tuyến AB, AC

với đường tròn $(O; R)$ (B, C là các tiếp điểm), tia AO cắt BC tại I . Điểm H thuộc đoạn thẳng BI (H khác B và H khác I). Đường thẳng d vuông góc với OH tại H ; d cắt AB, AC lần lượt tại P và Q .

- Chứng minh tứ giác $OHBP$ nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh rằng: $OP = OQ$.
- Khi H là trung điểm của đoạn thẳng BI , tính độ dài đoạn thẳng BC và diện tích của ΔOPQ theo R .

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác $OHBP$ nội tiếp đường tròn.

Ta có: $\widehat{OBA} = 90^\circ$ (BA là tiếp tuyến) $\Rightarrow \widehat{OBP} = 90^\circ$

Mà $\widehat{OHP} = 90^\circ$ ($d \perp OH$) $\Rightarrow \widehat{OBP} = \widehat{OHP} (= 90^\circ)$ nên tứ giác $OHBP$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh rằng: $OP = OQ$.

Chứng minh tứ giác $OHQC$ nội tiếp đường tròn, suy ra $\Rightarrow \widehat{OQH} = \widehat{OCB}$

Mà $\widehat{OPH} = \widehat{OBC}$ (tứ giác $OHBP$ nội tiếp)

$\widehat{OCB} = \widehat{OBC}$ ($OB = OC = R$)

Nên $\widehat{OPH} = \widehat{OQH}$, suy ra ΔOPQ cân nên $OP = OQ$.

c) Chứng minh $OA \perp BC$, suy ra $\Delta OBI \sim \Delta OAB$, suy ra $\frac{OI}{OB} = \frac{OB}{OA} = \sin \widehat{OAB} = \frac{1}{2} = \sin 30^\circ$

Suy ra $OI = \frac{1}{2}R$

$\frac{BI}{OB} = \frac{AB}{OA} = \cos \widehat{OAB} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, suy ra $BI = \frac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow BC = \sqrt{3}.R$

$OH^2 = OI^2 + IH^2 = \frac{1}{4}R^2 + \frac{3}{16}R^2 = \frac{7}{16}R^2 \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{7}}{4}R$

$\frac{OH}{PH} = \tan \widehat{OPH} = \tan \widehat{OBI} = \tan \widehat{OAB} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Suy ra $PH = OH \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{21}}{4}R$

$S_{\Delta OPQ} = \frac{1}{2}OH.PQ = OH.PH = \frac{\sqrt{7}}{4}R \cdot \frac{\sqrt{21}}{4}R = \frac{7\sqrt{3}}{16}R^2$.

---Hết---