

Câu 1. (3,0 điểm)

- Tính giá trị của biểu thức $A = 2022 + \sqrt{9} - \sqrt{4}$.
- Giải phương trình: $x^2 + 7x + 12 = 0$.
- Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x - y = -7 \\ 3x + y = 17 \end{cases}$$
.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho biểu thức: $B = \left(\frac{5}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm x để $B > 1$.

Câu 3. (2,0 điểm)

- Theo kế hoạch, một tổ công nhân dự định phải may 120 kiện khẩu trang để phục vụ công tác phòng chống dịch Covid – 19. Nhưng khi thực hiện nhờ cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 5 kiện so với dự định. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ phải làm bao nhiêu kiện khẩu trang?
- Cho phương trình $x^2 - 4x + m - 5 = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $(x_1 - 1)(x_2^2 - 3x_2 + m - 6) = -3$.

Câu 4. (2,5 điểm) Cho đường tròn (O) và điểm P nằm ngoài (O) . Kẻ hai tiếp tuyến PM, PN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng d đi qua P cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C ($PB < PC, d$ không đi qua tâm O).

- Chứng minh tứ giác $PMON$ nội tiếp.
- Chứng minh $PN^2 = PB \cdot PC$. Tính độ dài đoạn BC khi $PB = 4cm, PN = 6cm$.
- Gọi I là trung điểm của BC . Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T . Chứng minh $MT \parallel BC$.

Câu 5. (1,0 điểm)

- Cho $f(x) = x^2 - 6x + 12$. Giải phương trình $f(f(f(f(x)))) = 65539$.
- Cho tam giác ABC vuông tại A với các đường phân giác trong BM và CN . Chứng minh bất đẳng thức
$$\frac{(MC + MA)(NB + NA)}{MA \cdot NA} \geq 3 + 2\sqrt{2}$$
.

----- Hết -----

HƯỚNG DẪN GIẢI**Câu 1. (3,0 điểm)**

- Tính giá trị của biểu thức $A = 2022 + \sqrt{9} - \sqrt{4}$.
- Giải phương trình: $x^2 + 7x + 12 = 0$.
- Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - y = -7 \\ 3x + y = 17 \end{cases}$.

Lời giải

$$1. A = 2022 + \sqrt{9} - \sqrt{4} = 2022 + 3 - 2 = 2023$$

$$2. x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 4x + 3x + 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x+4) + 3(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4=0 \\ x+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=-3 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-4; -3\}$.

$$3. \begin{cases} 2x - y = -7 \\ 3x + y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 \cdot 2 - y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 11 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 11)$.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho biểu thức: $B = \left(\frac{5}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

- Rút gọn biểu thức B .
- Tìm x để $B > 1$.

Lời giải

1. Với $x \geq 0; x \neq 9$ ta có:

$$B = \left(\frac{5}{\sqrt{x}-3} + \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x}+2}$$

$$B = \left(\frac{5(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} + \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x}+2}$$

$$B = \frac{5\sqrt{x} + 15 + \sqrt{x} - 3}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x} + 2}$$

$$B = \frac{6\sqrt{x} + 12}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x} + 2}$$

$$B = \frac{6(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x} + 2}$$

$$B = \frac{6x}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 9$ thì biểu thức $B = \frac{6x}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}$.

$$2. \text{ Với } x \geq 0; x \neq 9, \text{ để } B > 1 \Leftrightarrow \frac{6x}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} > 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x}{x-9} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{6x - x + 9}{x-9} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x + 9}{x-9} > 0$$

$$\Leftrightarrow 5x + 9 \text{ và } x - 9 \text{ cùng dấu.}$$

Mà với $x \geq 0; x \neq 9 \Rightarrow 5x \geq 0 \Rightarrow 5x + 9 > 0$. Do đó: $x - 9 > 0 \Leftrightarrow x > 9$.

Kết hợp với điều kiện suy ra: $x > 9$.

Vậy với $x > 9$ thì $B > 1$.

Câu 3. (2,0 điểm)

1. Theo kế hoạch, một tổ công nhân dự định phải may 120 kiện khẩu trang để phục vụ công tác phòng chống dịch Covid – 19. Nhưng khi thực hiện nhờ cải tiến kỹ thuật nên mỗi ngày tổ đã làm tăng thêm 5 kiện so với dự định. Do đó tổ đã hoàn thành công việc sớm hơn dự định 2 ngày. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày tổ phải làm bao nhiêu kiện khẩu trang?

2. Cho phương trình $x^2 - 4x + m - 5 = 0$ (m là tham số). Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $(x_1 - 1)(x_2^2 - 3x_2 + m - 6) = -3$.

Lời giải

1. Gọi số kiện khẩu trang mỗi ngày mà tổ dự định phải làm là x (kiện khẩu trang, $x \in \mathbb{N}^*$)

Khi đó: thời gian hoàn thành 120 kiện khẩu trang theo dự định là $\frac{120}{x}$ (ngày)

Số kiện khẩu trang làm thực tế mỗi ngày là $x + 5$ (kiện)

Thời gian hoàn thành 120 kiện khẩu trang thực tế là $\frac{120}{x+5}$ (ngày).

Vì tổ hoàn thành sớm hơn 2 ngày so với dự kiến nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+5} = 2 \Leftrightarrow \frac{120(x+5)}{x(x+5)} - \frac{120x}{x(x+5)} = \frac{2x(x+5)}{x(x+5)}$$

$$\Rightarrow 120x + 600 - 120x = 2x^2 + 10x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 10x - 600 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x - 300 = 0$$

$$\text{Tính được } \Delta = 1225 > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 15 \text{ (tm)} \\ x_2 = -20 \text{ (ko tm)} \end{cases}$$

Vậy theo kế hoạch mỗi tổ phải làm 15 kiện khẩu trang mỗi ngày.

2. Ta có: $\Delta' = 9 - m$.

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 9$.

$$\text{Theo hệ thức Vi-et ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = m - 5 \end{cases}$$

Vì x_2 là nghiệm của phương trình nên :

$$x_2^2 - 4x_2 + m - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2^2 - 3x_2 - x_2 + m - 6 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2^2 - 3x_2 + m - 6 = x_2 - 1$$

$$\text{Mà } (x_1 - 1)(x_2^2 - 3x_2 + m - 6) = -3$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) = -3$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 = -3$$

$$\Leftrightarrow m - 5 - 4 + 1 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m - 5 = 0 \Leftrightarrow m = 5 \text{ (tm)}$$

Vậy với $m = 5$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn

$$(x_1 - 1)(x_2^2 - 3x_2 + m - 6) = -3.$$

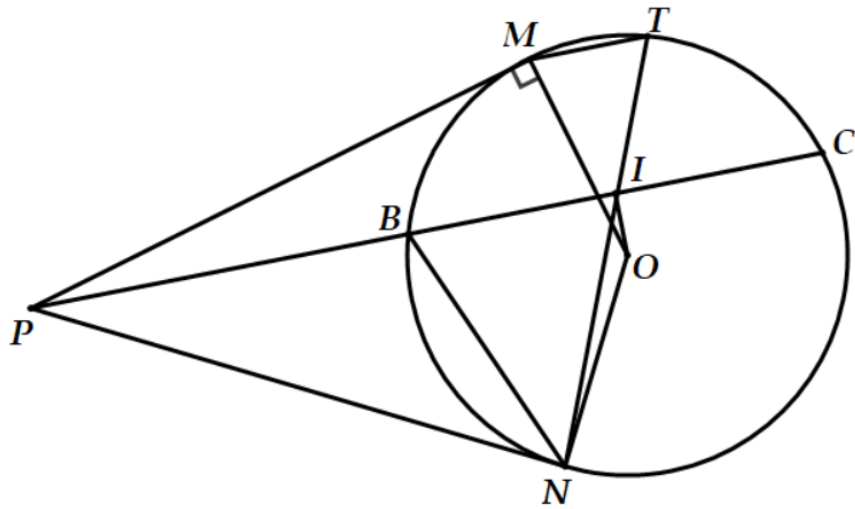
Câu 4. (2,5 điểm) Cho đường tròn (O) và điểm P nằm ngoài (O) . Kẻ hai tiếp tuyến PM, PN với đường tròn (O) (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng d đi qua P cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C ($PB < PC, d$ không đi qua tâm O).

1. Chứng minh tứ giác $PMON$ nội tiếp.

2. Chứng minh $PN^2 = PB \cdot PC$. Tính độ dài đoạn BC khi $PB = 4\text{cm}, PN = 6\text{cm}$.

3. Gọi I là trung điểm của BC . Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T . Chứng minh $MT \parallel BC$.

Lời giải



1. Chứng minh tứ giác $PMON$ nội tiếp

Vì PM, PN là các tiếp tuyến của (O) lần lượt tại M, N nên $OMP = ONP = 90^\circ$

Xét tứ giác $PMON$ có $OMP + ONP = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, mà hai góc này ở vị trí đối diện nhau nên tứ giác $PMON$ nội tiếp.

2. Chứng minh $PN^2 = PB \cdot PC$. Tính độ dài đoạn thẳng BC khi $PB = 4cm, PN = 6cm$.

Xét $\triangle PNB$ & $\triangle PCN$ có:

$\angle PNB = \angle PCN$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung BN)

$\angle NPC$ là góc chung

$\Rightarrow \triangle PNB \sim \triangle PCN$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{PB}{PN} = \frac{PN}{PC} \Rightarrow PN^2 = PB \cdot PC$$

Thay $PB = 4cm, PN = 6cm$ ta có: $6^2 = 4 \cdot PC \Rightarrow PC = 9(cm)$

Vậy $BC = PC - PB = 9 - 4 = 5cm$.

3) Gọi I là trung điểm của BC . Đường thẳng NI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai T . Chứng minh $MT \parallel BC$.

Vì I là trung điểm của BC (gt) nên $OI \perp BC$ tại I (quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây)

$\Rightarrow \angle OIP = \angle OMP = 90^\circ$, mà hai góc này ở vị trí kề nhau cùng nhìn cạnh OP nên tứ giác $OIMP$ nội tiếp.

Lại có tứ giác $OMP N$ nội tiếp (câu a) suy ra 5 điểm O, I, M, P, N cùng thuộc 1 đường tròn.

$\Rightarrow \angle NIP = \angle NMP$ (cùng chắn cung NP)

Mà $\angle NMP = \angle NTM$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung MN)

$\Rightarrow \angle NIP = \angle NTM$

Hai góc này ở vị trí đồng vị nên $MT \parallel BC$ (đpcm).

Câu 5. (1,0 điểm)

1. Cho $f(x) = x^2 - 6x + 12$. Giải phương trình $f(f(f(f(x)))) = 65539$.

2. Cho tam giác ABC vuông tại A với các đường phân giác trong BM và CN . Chứng minh bất đẳng thức $\frac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA.NA} \geq 3+2\sqrt{2}$.

Lời giải

1. Ta có: $f(x) = x^2 - 6x + 12$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 - 6x + 9 + 3$$

$$\Leftrightarrow f(x) = (x-3)^2 + 3$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 3 = (x-3)^2$$

Khi đó: $f(f(x)) = (f(x) - 3)^2 + 3 = (x-3)^4 + 3 \Rightarrow f(f(x)) - 3 = (x-3)^4$

$$f(f(f(x))) = [f(f(x) - 3)]^2 + 3 = (x-3)^8 + 3 \Rightarrow f(f(f(x))) - 3 = (x-3)^8$$

$$\Rightarrow f(f(f(f(x)))) = (x-3)^{16} + 3.$$

Do đó: $f(f(f(f(x)))) = 65539$

$$\Leftrightarrow (x-3)^{16} + 3 = 65539$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^{16} = 65536$$

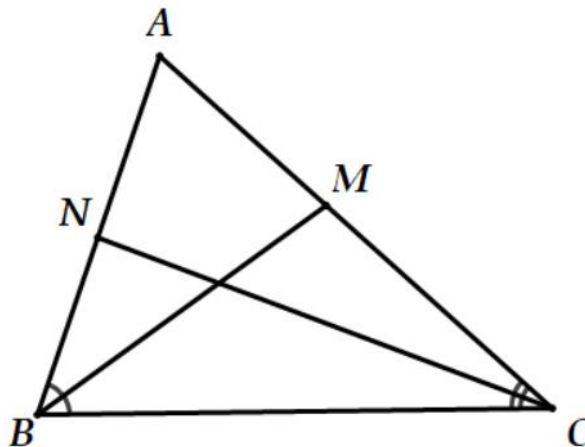
$$\Leftrightarrow (x-3)^{16} = 2^{16}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=2 \\ x-3=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=1 \end{cases}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{1; 5\}$.

2.



Xét ΔABC có BM, CN là các đường phân giác, theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{BC}{AB}; \frac{NB}{NA} = \frac{BC}{AC} \quad (1)$$

Áp dụng định lí Py – ta – go vào ΔABC vuông tại A ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2$. (2)

Từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{aligned} \frac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA \cdot NA} &= \frac{MC+MA}{MA} \cdot \frac{NB+NA}{NA} \\ &= \left(\frac{MC}{MA} + 1\right) \left(\frac{NB}{NA} + 1\right) \\ &= \left(\frac{BC}{AB} + 1\right) \left(\frac{BC}{AC} + 1\right) \\ &= \frac{BC^2}{AB \cdot AC} + \frac{BC}{AB} + \frac{BC}{AC} + 1 \\ &= \frac{AB^2 + AC^2}{AB \cdot AC} + BC \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}\right) + 1 \\ &= 1 + \frac{AB^2 + AC^2}{AB \cdot AC} + \sqrt{AB^2 + AC^2} \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}\right) \\ &\geq 1 + \frac{2 \cdot AB \cdot AC}{AB \cdot AC} + \sqrt{2 \cdot AB \cdot AC} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{AB} \cdot \frac{1}{AC}} \quad (\text{bất đẳng thức Cau – chy}) \\ &= 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2} \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

_____ **THCS.TOANMATH.com** _____