

Câu 1. (2,0 điểm)

Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = 4\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{45}$

b) $B = \frac{a - 2\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ (với $0 < a \neq 1$)

Câu 2. (1,5 điểm)

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = (m-1)x + 2$ đi qua điểm $A(1;4)$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 + 2mx - 3 = 0$ (1) (với m là tham số).

a) Giải phương trình (1) với $m = 1$

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = 1$

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $x + y + 3xy = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$

Câu 5. (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn với $AB > AC$. Các đường cao BM, CN cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác AMHN nội tiếp.

b) Gọi D là giao điểm của AH và BC. Chứng minh AD là phân giác của góc MDN.

c) Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại I và J. Chứng minh D là trung điểm của IJ.

----- Hết -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (2,0 điểm)

Rút gọn các biểu thức sau :

a) $A = 4\sqrt{5} + \sqrt{20} - \sqrt{45}$

b) $B = \frac{a - 2\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} + \frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$ (với $0 < a \neq 1$)

Lời giải

a) $A = 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

b) Với $a > 0$ ta có :

$$B = \frac{\sqrt{a^2} - 2\sqrt{a} + 1}{\sqrt{a} - 1} + \frac{\sqrt{a^2} + \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

$$B = \frac{(\sqrt{a} - 1)^2}{\sqrt{a} - 1} + \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a}}$$

$$B = \sqrt{a} - 1 + \sqrt{a} + 1$$

$$B = 2\sqrt{a}$$

Câu 2. (1,5 điểm)

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = (m - 1)x + 2$ đi qua điểm $A(1; 4)$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases}$$

Lời giải

a) Vì đồ thị hàm số $y = (m - 1)x + 2$ đi qua điểm $A(1; 4)$ nên ta có

$$4 = (m - 1) \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow 4 = m + 1 \Leftrightarrow m = 3$$

Vậy $m = 3$

b)
$$\begin{cases} x + 5y = 7 \\ 3x - 5y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 8 \\ x + 5y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 2 + 5y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (2; 1)$

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 + 2mx - 3 = 0$ (1) (với m là tham số).

a) Giải phương trình (1) với $m = 1$

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = 1$

Lời giải

a) Thay $m = 1$ vào phương trình (1), ta có : $x^2 + 2x - 3 = 0$

Ta thấy $a + b + c = 1 + 2 + (-3) = 0$ nên phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -3$

Vậy $m = 1$ thì phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 = 1; x_2 = -3$

b) Ta thấy $ac = -3 < 0$, $\forall m$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi giá trị của m

Theo hệ thức Vi - ét ta có :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1x_2 = -3 \end{cases}$$

Ta có $x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 = 1$

Hay $(-2m)^2 - 3 = 1 \Leftrightarrow 4m^2 = 4 \Leftrightarrow m^2 = 1 \Leftrightarrow m = 1$ hoặc $m = -1$

Vậy $m = 1; m = -1$ thì thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 4. (1,0 điểm)

Cho $x, y > 0$ và thỏa mãn $x + y + 3xy = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2$

Lời giải

Ta có :
$$\begin{cases} x^2 + 1 \geq 2x \\ y^2 + 1 \geq 2y \\ x^2 + y^2 \geq 2xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 \geq 2x \\ y^2 + 1 \geq 2y \\ 3(x^2 + y^2) \geq 6xy \end{cases}$$

$\Rightarrow 4(x^2 + y^2) + 2 \geq 2(x + y + 3xy)$

$\Rightarrow 4(x^2 + y^2) + 2 \geq 10$ (vì $x + y + 3xy = 5$)

$\Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2$. Dấu “=” xảy ra khi $x = y = 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2 khi $x = y = 1$

Câu 5. (3,5 điểm)

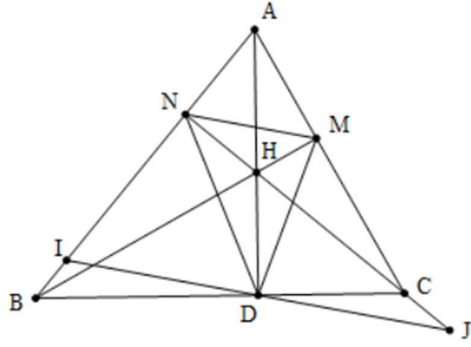
Cho tam giác ABC nhọn với $AB > AC$. Các đường cao BM, CN cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác AMHN nội tiếp.

b) Gọi D là giao điểm của AH và BC. Chứng minh AD là phân giác của góc MDN.

c) Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại I và J. Chứng minh D là trung điểm của IJ.

Lời giải



a) Chứng minh tứ giác AMHN nội tiếp.

Do BM, CN là các đường cao của tam giác ABC nên $BM \perp AC$, $CN \perp AB$

Khi đó : $\widehat{AMH} = 90^\circ$, $\widehat{ANH} = 90^\circ$

Xét tứ giác AMHN có $\widehat{AMH} + \widehat{ANH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Vậy tứ giác AMHN nội tiếp.

b) Gọi D là giao điểm của AH và BC. Chứng minh AD là phân giác của góc MDN.

Do H là giao điểm của các đường cao BM, CN \Rightarrow H là trực tâm của tam giác ABC.

Lại có D là giao điểm của AH và BC $\Rightarrow AD \perp BC$

Tứ giác BDHN có $\widehat{BDH} + \widehat{BNH} = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác BDHN nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{NBH} = \widehat{NDH}$ (cùng chắn cung NH) (1)

Tứ giác ABDM có $\widehat{ADB} = \widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác ABDM nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{ABM} = \widehat{ADM}$ (cùng chắn cung AM) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ADN} = \widehat{ADM}$. Vậy AD là phân giác của góc MDN.

c) Đường thẳng qua D và song song với MN cắt AB, CN lần lượt tại I và J. Chứng minh D là trung điểm của IJ.

Tương tự ta chứng minh được NC là phân giác của $\widehat{MND} \Rightarrow \widehat{MNC} = \widehat{CND} = \widehat{JND}$ (3)

Vì MN // IJ nên $\widehat{MNJ} = \widehat{NJD}$ (so le trong) hay $\widehat{MNC} = \widehat{NJD}$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow \widehat{JND} = \widehat{NJD} \Rightarrow$ tam giác NDJ cân tại D $\Rightarrow DN = DJ$ (*)

Xét tam giác NIJ vuông tại N nên ta có : $\widehat{JND} + \widehat{DNI} = \widehat{NJD} + \widehat{NID} = 90^\circ$

Mà $\widehat{JND} = \widehat{NJD} \Rightarrow \widehat{DNI} = \widehat{NID} \Rightarrow$ tam giác NDI cân tại D $\Rightarrow DN = DI$ (**)

Từ (*) và (**) $\Rightarrow DI = DJ$. Vậy D là trung điểm của IJ.

_____ THCS.TOANMATH.com _____