

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề này gồm 01 trang)

Môn thi: TOÁN

Thời gian làm bài: 120 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (2,0 điểm) Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{3+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 9$.

- 1) Rút gọn biểu thức A .
- 2) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.
- 3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $A > \frac{1}{2}$.

Câu 2. (2,0 điểm) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m \end{cases}$ với m là tham số.

- 1) Giải hệ phương trình với $m = 1$.
 - 2) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$.
- Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S = x + y$.

Câu 3. (2,0 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 2$.

- 1) Tìm tọa độ hai giao điểm A, B của (d) với (P) .
- 2) Gọi (c) là đường thẳng đi qua điểm $C(-1; 4)$ và song song với đường thẳng (d) . Viết phương trình đường thẳng (c) .

Câu 4. (3,5 điểm)

1) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ tiếp tuyến MA (A là tiếp điểm) và cát tuyến MBC không đi qua tâm O (điểm B nằm giữa hai điểm M và C). Gọi H là trung điểm BC . Đường thẳng OH cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm N, K (trong đó điểm K thuộc cung BAC). Gọi D là giao điểm của AN và BC .

- a) Chứng minh tứ giác $AKHD$ là tứ giác nội tiếp.
 - b) Chứng minh: $\widehat{NAB} = \widehat{NBD}$ và $NB^2 = NA \cdot ND$.
 - c) Chứng minh rằng khi $(O; R)$ và điểm M cố định đồng thời cát tuyến MBC thay đổi thì điểm D nằm trên một đường tròn cố định.
- 2) Một hình trụ có chu vi đáy bằng $20\pi(\text{cm})$ và chiều cao bằng $7(\text{cm})$. Tính thể tích của hình trụ đó.

Câu 5. (0,5 điểm)

Cho các số dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 2022$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \sqrt{2a^2 + ab + 2b^2} + \sqrt{2b^2 + bc + 2c^2} + \sqrt{2c^2 + ca + 2a^2}$

---HẾT---

Họ và tên thí sinh..... Số báo danh

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

MÔN: TOÁN

(Hướng dẫn gồm 03 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1.	Cho biểu thức: $A = \left(\frac{1}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{3+\sqrt{x}} \right) \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$ và $x \neq 9$. 1) Rút gọn biểu thức A . 2) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$. 3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để $A > \frac{1}{2}$.	2,0
	1) Ta có: $A = \left(\frac{3+\sqrt{x} - (3-\sqrt{x})}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \right) \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	0,25
	$= \frac{2\sqrt{x}}{(3+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})} \cdot \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$	0,25
	$= \frac{2}{3-\sqrt{x}}$	0,25
	Vậy với $x > 0$ và $x \neq 9$ thì $A = \frac{2}{3-\sqrt{x}}$	0,25
	2) Với $x = 4$ thỏa mãn điều kiện xác định, thay vào ta có: $A = \frac{2}{3-\sqrt{4}} = 2$	0,25
	Vậy với $x = 4$ thì $A = 2$	0,25
	3) $A > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3-\sqrt{x}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{3-\sqrt{x}} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{4-(3-\sqrt{x})}{2(3-\sqrt{x})} > 0 \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{x}}{2(3-\sqrt{x})} > 0$	0,25
	$\Leftrightarrow 3-\sqrt{x} > 0$ (do $1+\sqrt{x} > 0$) $\Leftrightarrow \sqrt{x} < 3 \Leftrightarrow x < 9$ Do $x \in \mathbb{Z}$ và kết hợp với điều kiện xác định $\Rightarrow x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$	0,25
Câu 2.	Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m \end{cases}$ với m là tham số. 1) Giải hệ phương trình với $m = 1$. 2) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x; y)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $S = x + y$.	2,0
	1) Thay $m = 1$ vào ta có $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = -1 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$	0,25
	Vậy với $m = 1$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (0; 1)$.	0,25

	2) Hệ $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - my \\ mx - y = -m \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - my \\ m(1 - my) - y = -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - my \\ (m^2 + 1)y = 2m \end{cases}$	0,25
	Vì $m^2 + 1 \neq 0$ với mọi m nên hệ đã cho luôn có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 1 - m \cdot \frac{2m}{m^2 + 1} \\ y = \frac{2m}{m^2 + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - m^2}{m^2 + 1} \\ y = \frac{2m}{m^2 + 1} \end{cases}$	0,25
	Ta có $x^2 + y^2 = \left(\frac{1 - m^2}{m^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{2m}{m^2 + 1}\right)^2 = \frac{1 - 2m^2 + m^4 + 4m^2}{(1 + m^2)^2} = \frac{(1 + m^2)^2}{(1 + m^2)^2} = 1$ Ta lại có $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2 \Rightarrow x + y \leq \sqrt{2}$ Vậy T đạt giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{2}$ khi $x = y \Leftrightarrow \frac{1 - m^2}{m^2 + 1} = \frac{2m}{m^2 + 1}$ $\Leftrightarrow m^2 + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -1 + \sqrt{2}$ hoặc $m = -1 - \sqrt{2}$ (loại vì khi đó $S = -\sqrt{2}$)	0,25
Câu 3.	Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = x + 2$. 1) Tìm tọa độ hai giao điểm A, B của (d) với (P) . 2) Gọi (c) là đường thẳng đi qua điểm $C(-1; 4)$ và song song với đường thẳng (d) . Viết phương trình đường thẳng (c) .	2,0
	1) Hoành độ giao điểm của parabol $(P): y = x^2$ với đường thẳng $(d): y = x + 2$ là nghiệm phương trình: $x^2 = x + 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0(1)$	
	(1) là phương trình bậc hai có $a - b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm $x = 1$ và $x = 2$	0,25
	Với $x = -1$ thay vào (P) hoặc (d) ta có $y = 1$ Với $x = 2$ thay vào (P) hoặc (d) ta có $y = 4$	0,25
	Vậy hai giao điểm của (P) và (d) là $A(-1; 1)$ và $B(2; 4)$.	0,25
	2) Giả sử đường thẳng (c) có phương trình $y = ax + b$ Do (c) song song với (d) mà (d) có hệ số góc bằng 1 nên $a = 1$ và $b \neq 2$ (1)	0,25
	Do (c) đi qua điểm $C(-1; 4)$ nên ta có $4 = -a + b$ (2)	0,25
	Từ (1) và (2) ta có $a = 1$ và $b = 5$	0,25
	$\Rightarrow (c)$ có phương trình $y = x + 5$	0,25
Câu 4.	1) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ tiếp tuyến MA (A là tiếp điểm) và cát tuyến MBC không đi qua tâm O (điểm B nằm giữa hai điểm M và C). Gọi H là trung điểm BC . Đường thẳng OH cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm N, K (trong đó điểm K thuộc cung BAC). Gọi D là giao điểm của AN và BC . a) Chứng minh tứ giác $AKHD$ là tứ giác nội tiếp. b) Chứng minh: $\widehat{NAB} = \widehat{NBD}$ và $NB^2 = NA \cdot ND$. c) Chứng minh rằng khi $(O; R)$ và điểm M cố định đồng thời cát tuyến MBC thay đổi thì điểm D nằm trên một đường tròn cố định.	3,5

	2) Một hình trụ có chu vi đáy bằng $20\pi(\text{cm})$ và chiều cao bằng $7(\text{cm})$. Tính thể tích của hình trụ đó.	
	1) a) Xét $(O; R)$ có \widehat{KAN} là góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $\Rightarrow \widehat{KAN} = 90^\circ$	0,25
	Có BC là dây không đi qua tâm, H là trung điểm của BC , KN là đường kính của đường tròn $(O; R)$. $\Rightarrow KN \perp BC \Rightarrow \widehat{KHD} = 90^\circ$	0,25
	Tứ giác $AKHD$ có $\widehat{KAD} + \widehat{KHD} = 180^\circ$; $\widehat{KAD}, \widehat{KHD}$ là hai góc đối diện \Rightarrow Tứ giác $AKHD$ là tứ giác nội tiếp	0,5
	b) + Xét $(O; R)$ có $KN \perp BC \Rightarrow N$ là điểm chính giữa cung BC	0,25
	$\Rightarrow \widehat{BN} = \widehat{NC}$	0,25
	$\Rightarrow \widehat{BAN} = \widehat{NBC}$ (2 góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau).	0,25
	+ Xét $\triangle BND; \triangle ANB$ có $\widehat{BAN} = \widehat{NBD}$; \widehat{BNA} chung	0,25
	$\triangle ANB$ đồng dạng $\triangle BND$ (gg)	0,25
	$\Rightarrow \frac{AN}{BN} = \frac{NB}{ND} \Rightarrow NB^2 = NA \cdot ND$	0,25
	c) Tứ giác $AKHD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ADH} + \widehat{AKH} = 180^\circ$ (hai góc đối) (1) ta có $\Rightarrow \widehat{ADH} + \widehat{ADM} = 180^\circ$ (hai góc kề bù) (2) từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{AKH} = \widehat{ADM}$ Mà $\widehat{AKH} = \widehat{MAD}$ (cùng có số đo $= \frac{1}{2} sđ \widehat{AN}$) $\Rightarrow \widehat{ADM} = \widehat{MAD}$	0,25
	$\triangle AMD$ có $\widehat{ADM} = \widehat{MAD} \Rightarrow \triangle AMD$ cân tại $M \Rightarrow MD = MA$ Mà $M, (O; R)$ cố định \Rightarrow tiếp tuyến MA cố định và độ dài MA không đổi Suy ra D thuộc đường tròn tâm M bán kính MA .	0,25
	2) Hình trụ có chu vi đáy bằng 20π (cm) $\Rightarrow 2\pi R = 20\pi \Leftrightarrow R = 10\text{cm}$	0,25
	Thể tích của hình trụ là $V = \pi R^2 h = \pi \cdot 10^2 \cdot 7 = 700\pi (\text{cm}^3)$	0,25
Câu 5.	Cho các số dương a, b, c thay đổi và thỏa mãn điều kiện: $a + b + c = 2022$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $M = \sqrt{2a^2 + ab + 2b^2} + \sqrt{2b^2 + bc + 2c^2} + \sqrt{2c^2 + ca + 2a^2}$	0,5
	Ta có $2a^2 + ab + 2b^2 = \frac{5}{4}(a+b)^2 + \frac{3}{4}(a-b)^2 \geq \frac{5}{4}(a+b)^2 \Rightarrow \sqrt{2a^2 + ab + 2b^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(a+b)$ Chứng minh tương tự $\sqrt{2b^2 + bc + 2c^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(b+c)$; $\sqrt{2c^2 + ca + 2a^2} \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(c+a)$	0,25

$\Rightarrow M \geq \frac{\sqrt{5}}{2}(a+b) + \frac{\sqrt{5}}{2}(b+c) + \frac{\sqrt{5}}{2}(c+a) = \sqrt{5}(a+b+c)$ $M \geq 2022\sqrt{5}. \text{ Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c = 674.$ $\text{Vậy Min}M = 2022\sqrt{5} \Leftrightarrow a = b = c = 674$	0,25
---	------

Ghi chú:

- +) Hướng dẫn trên gồm các bước giải và biểu điểm tương ứng. Thi sinh phải biến đổi và lập luận chặt chẽ mới cho điểm tối đa theo thang điểm.
- +) Câu 4 nếu không có hình vẽ hoặc hình vẽ sai thì không chấm điểm.
- +) Các cách giải khác mà đúng cho điểm tối đa theo thang điểm.
- +) Điểm toàn bài là tổng các điểm thành phần, không làm tròn.

---HẾT---