SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TỈNH NINH BÌNH

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm có 50 câu, 06 trang)

ĐỀ THI KHẢO SÁT, ĐÁNH GIÁ
CHẤT LƯỢNG GIÁO DỤC LỚP 12 THPT, GDTX
NĂM HỌC 2022-2023
Bài thi: TOÁN
Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh: ....
Số báo danh: ....

Mã đề thi 001

Câu 1. Cho số phức $z = 3 + 7i$. Phần ảo của số phức $w = 2z - \bar{z}$ bằng

A. 7. **B.** 3. **C.** 9. **D.** 21.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y - z + 1 = 0$. Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng nào dưới đây?

A. $d_1 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

B. $d_2 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1}$.

C. $d_3 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z}{-1}$.

D. $d_4 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z}{1}$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = e^{2x} + C$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x) = 2e^{2x}$. **B.** $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}$. **C.** $f(x) = 2e^{x}$. **D.** $f(x) = e^{2x}$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 1)$. **B.** $(-5; -1)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $(2; 4)$.

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M\,(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M_3\,(0; 2; 3)$. **B.** $M_4\,(1; 0; 3)$. **C.** $M_1\,(1; 0; 0)$. **D.** $M_2\,(1; 2; 0)$.

Câu 6. Nếu $\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ và $\displaystyle\int_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ thì $\displaystyle\int_1^4 2f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** 6. **D.** -6.

Câu 7. Nghiệm của phương trình $3^{2x+4} = 9$ là

A. $x = 0$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = -2$.

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) \le 3$ là

A. $S = [1; 8]$. **B.** $S = (1; 8]$. **C.** $S = [1; 9]$. **D.** $S = (1; 9]$.

Câu 9. Trên mặt phẳng toạ độ, điểm $M\,(3; -2)$ biểu diễn cho số phức z. Môđun của z bằng

A. $\sqrt{5}$. **B.** 13. **C.** 5. **D.** $\sqrt{13}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết $ABCD$ có chu vi bằng 20, $SA = 10$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

A. $\dfrac{250}{6}$. **B.** $\dfrac{200}{6}$. **C.** $\dfrac{200}{3}$. **D.** $\dfrac{250}{3}$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln x + C$. **B.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln^2 x + C$.

C. $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$. **D.** $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln^2 x + C$.

Câu 12. Trong không gian, cho 2023 điểm phân biệt. Có tối đa bao nhiêu mặt phẳng phân biệt tạo bởi 3 trong số 2023 điểm đó?

A. 2023. **B.** $2023!$. **C.** C_{2023}^3. **D.** A_{2023}^3.

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số đã cho và trục Ox có bao nhiêu điểm chung?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, trục Oz có một vectơ chỉ phương là

A. $\overrightarrow{n}_3 = (0; 2023; 0)$. **B.** $\overrightarrow{n}_2 = (2023; 0; 0)$.

C. $\overrightarrow{n}_1 = (2023; 2023; 0)$. **D.** $\overrightarrow{n}_4 = (0; 0; 2023)$.

Câu 15. Nếu $\displaystyle\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ thì $\displaystyle\int\limits_0^4 [3f(x) - 2]\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 14. **B.** 2. **C.** 16. **D.** -2.

Câu 16. Công thức tính diện tích của mặt cầu có bán kính r là

A. $S = 4\pi r^2$. **B.** $S = \dfrac{4}{3}\pi r^2$. **C.** $S = \dfrac{4}{3}\pi r^3$. **D.** $S = 4\pi r^3$.

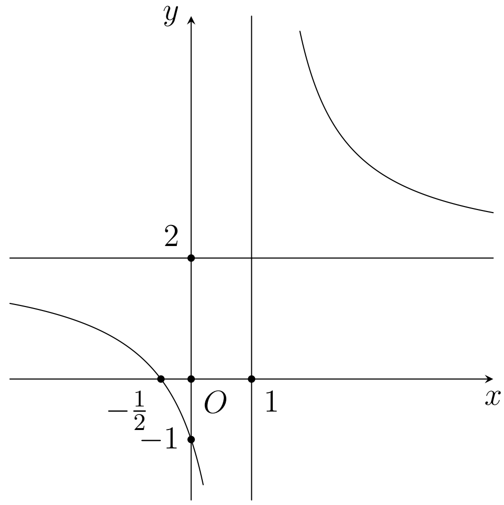
Câu 17. Với a, b là các số thực dương thoả mãn $a^4 b^6 = 100$ thì $2\log a + 3\log b$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 2.

Câu 18.

Đường cong trong hình vẽ là đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, với a, b, c, d là các số thực. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 0]$ là

A. -1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.



Câu 19. Đạo hàm của hàm số $y = 23^x$ là

A. $y' = 23^x \cdot \ln 23$. **B.** $y' = x \cdot 23^{x-1}$. **C.** $y' = x23^x \cdot \ln 23$. **D.** $y' = \dfrac{23^x}{\ln 23}$.

Câu 20. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng $8a^3$. Diện tích toàn phần của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A. $8a^2$. **B.** $16a^2$. **C.** $12a^2$. **D.** $24a^2$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Mặt cầu (S) đi qua điểm nào dưới đây?

A. $D(9; -1; 1)$. **B.** $C(0; 3; 1)$. **C.** $A(1; 4; 4)$. **D.** $B(1; -2; 2)$.

Câu 22. Cho số phức $z = 2 - 5i$. Phần thực của số phức iz bằng

A. -2. **B.** 2. **C.** -5. **D.** 5.

Câu 23. Nếu tăng bán kính đáy của một khối nón lên 2 lần và giữ nguyên chiều cao thì thể tích của khối nón đó tăng lên bao nhiêu lần?

A. 2. **B.** 16. **C.** 4. **D.** 8.

Câu 24. Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\sqrt{3}}$ là

A. $D = [1; +\infty)$. **B.** $D = (0; +\infty)$. **C.** $D = (1; +\infty)$. **D.** $D = [0; +\infty)$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có $AB = AC = 2a$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Tính số đo góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

A. $120°$. **B.** $30°$. **C.** $60°$. **D.** $90°$.

Câu 26. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $3a^3$ và mặt đáy $ABCD$ là hình bình hành. Biết diện tích tam giác SAB bằng $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Khoảng cách giữa SB và CD bằng

A. $3\sqrt{2}a$. **B.** $6\sqrt{2}a$. **C.** $6\sqrt{3}a$. **D.** $3\sqrt{3}a$.

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S) : (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 16$. Số điểm chung của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) là

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** vô số.

Câu 28. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = \left|x^2 - 3x + 2\right|$ và $y = 0$ quanh trục Ox bằng

A. $\dfrac{\pi^2}{30}$. **B.** $\dfrac{\pi}{6}$. **C.** $\dfrac{\pi}{30}$. **D.** $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Câu 29. Cho hàm số $y = \dfrac{3}{1-2x}$. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

A. $y = 3$. **B.** $y = \dfrac{1}{2}$. **C.** $y = 0$. **D.** $y = -\dfrac{3}{2}$.

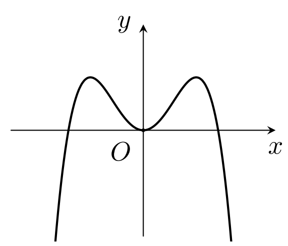
Câu 30. Tổng các nghiệm thực của phương trình $\log_2(x+1) = 2\log_4\left(x^2 - 1\right)$ bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** -2. **D.** 1.

Câu 31.

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x) = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như trong hình bên. Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.



Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty \;\|\; -\infty$	$\nearrow$	2

Hỏi hàm số đã cho là hàm số nào trong các hàm số sau?

A. $y = \dfrac{2x}{x-1}$. **B.** $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. **C.** $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$. **D.** $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

Câu 33. Cho dãy số (u_n) , biết: $u_1 = 2, u_{n+1} = u_n \cdot \dfrac{1}{3}$ với $n \geqslant 1$. Tìm u_{100}.

A. $\dfrac{2}{3^{100}}$. **B.** $\dfrac{4}{3^{999}}$. **C.** $\dfrac{4}{3^{99}}$. **D.** $\dfrac{2}{3^{99}}$.

Câu 34. Trên giá sách có 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Vật lí và 2 quyển sách Hóa học. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất sao cho 3 quyển lấy ra có ít nhất 1 quyển sách Toán.

A. $\dfrac{19}{21}$. **B.** $\dfrac{37}{42}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{6}$.

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-6	$\nearrow$	2

Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$. **B.** Hàm số có giá trị cực đại bằng -1.

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = 5$. **D.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -6$.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;4)$ và $B(3;-2;2)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

A. $2x - 2y - z - 5 = 0$. **B.** $2x - 2y - z + 1 = 0$.

C. $x + 3z + 2 = 0$. **D.** $x + 3z + 6 = 0$.

Câu 37. Trên mặt phẳng toạ độ, tập hợp điểm biểu diễn của các số phức z thoả mãn $|z - 2i| = |\bar{z} + 4|$ là một đường thẳng có phương trình là

A. $2x + y + 3 = 0$. **B.** $x + 2y + 3 = 0$. **C.** $2x - y + 3 = 0$. **D.** $x - 2y + 3 = 0$.

Câu 38. Đồ thị hàm số nào sau đây có đúng 1 đường tiệm cận ngang?

A. $y = \dfrac{x^2 - x}{x+1}$. **B.** $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{5x-3}$. **C.** $y = \dfrac{\sqrt{2-x^2}}{x+3}$. **D.** $y = \dfrac{4x-3}{x^2-2x}$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{SB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SC}$ và L là giao điểm của đường thẳng SK với đường thẳng BC. Biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng 56, thể tích khối chóp $S.ABL$ bằng

A. 21. **B.** 32. **C.** 40. **D.** 42.

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$ và $(Q): x+3y=12$. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q). Đường thẳng Δ song song với đường thẳng nào dưới đây?

A. $d_3: \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-6}{2}$.
B. $d_4: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$.
C. $d_2: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$.
D. $d_1: \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-4}{-1}=\dfrac{z-6}{2}$.

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0;1]$, thoả mãn $\displaystyle\int\limits_{-2}^{-1} f(x+2)\,\mathrm{d}x=3$ và $f(1)=4$. Khi đó tích phân $I=\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, f'(\sin x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 42. Cho một mặt cầu và một hình nón nội tiếp trong mặt cầu. Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác nhọn, không đều và diện tích xung quanh của hình nón bằng $\dfrac{3}{8}$ diện tích mặt cầu. Gọi α là góc giữa đường sinh và mặt đáy của hình nón. Biết $\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{a}-b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau. Tổng $a+b+c$ bằng

A. 16. **B.** 28. **C.** 26. **D.** 18.

Câu 43. Gọi S là tập các số nguyên dương a để bất phương trình $6^x+2^{a+2}<4\cdot 3^x+2^{x+a}$ có ít nhất 1 và không quá 10 nghiệm nguyên. Tổng các phần tử của S bằng

A. 204. **B.** 201. **C.** 205. **D.** 208.

Câu 44. Có bao nhiêu số nguyên $m\in(-2023;2023)$ để hàm số $y=x^2-2m|x-m+6|+1$ có ba điểm cực trị?

A. 2021. **B.** 2019. **C.** 2018. **D.** 2020.

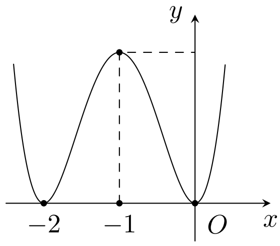
Câu 45. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2-(m-2)z+m^2=0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm z_1, z_2 thoả mãn $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$?

A. 2. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 46. Xét hai số phức z, w thỏa mãn $|z-w|=\sqrt{2}$ và $|\bar{z}+4+4i|+|w|=3\sqrt{2}$. Biết biểu thức $P=|w+1+2i|$ đạt giá trị lớn nhất khi $w=w_0$, giá trị $|w_0+2-i|$ bằng

A. $\sqrt{41}$. **B.** $\sqrt{10}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\sqrt{17}$.

Câu 47.
Cho $f(x)$ là một hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f\left(\log_2\left(x^2+2x+2\right)\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $f(2x-1)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(x)=f'(x)+2(3x+1)e^x, \forall x\in\mathbb{R}$ và $f(1)=-3e$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=2f(x)$ và $y=f'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(20;30)$. **B.** $(10;20)$. **C.** $(0;10)$. **D.** $(30;40)$.

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -2 + t \end{cases}$ và mặt cầu $(S) : (x - 2 - m)^2 + (y - 1 + m)^2 + (z - 2 + m)^2 = 25$, với m là tham số. Gọi I là tâm của (S). Khi Δ cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất, OI bằng

A. $\sqrt{19}$. **B.** $2\sqrt{19}$. **C.** 3. **D.** $\sqrt{3}$.

Câu 50. Xét các số thực dương a, b thoả mãn $\log_2 (a + b) = \log_3 \left(a^2 + b^2\right)$. Khi đó $a^3 + b^3$ có thể nhận nhiều nhất bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 36. **B.** 35. **C.** 37. **D.** 38.

——— HẾT ———

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TỈNH NINH BÌNH	ĐÁP ÁN CHI TIẾT ĐỀ THI KHẢO SÁT, ĐÁNH GIÁ CHẤT LƯỢNG GIÁO DỤC LỚP 12 THPT, GDTX NĂM HỌC 2022-2023 Bài thi: TOÁN
ĐỀ THI CHÍNH THỨC	Mã đề thi 001

Câu 1. Cho số phức $z = 3 + 7i$. Phần ảo của số phức $w = 2z - \bar{z}$ bằng

A. 7. B. 3. C. 9. D. 21.

Lời giải.

$z = 3 + 7i \Rightarrow w = 2z - \bar{z} = 2(3 + 7i) - (3 - 7i) = 3 + 21i \Rightarrow$ phần ảo của w bằng 21.

Chọn đáp án D □

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y - z + 1 = 0$. Mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng nào dưới đây?

A. $d_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{-1}$. B. $d_2: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1}$.

C. $d_3: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z}{-1}$. D. $d_4: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z}{1}$.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n} = (1; -2; -1)$, đây cũng là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d_3 nên $d_3 \perp (P)$.

Chọn đáp án C □

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ thoả mãn $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x = e^{2x} + C$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x) = 2e^{2x}$. B. $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{2x}$. C. $f(x) = 2e^{x}$. D. $f(x) = e^{2x}$.

Lời giải.

$$\int f(x)\,dx = e^{2x} + C \Rightarrow \left(\int f(x)\,dx\right)' = \left(e^{2x} + C\right)' \Rightarrow f(x) = 2e^{2x}.$$

Chọn đáp án A □

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1; 1)$. B. $(-5; -1)$. C. $(0; 1)$. D. $(2; 4)$.

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đã cho nghịch biến trên $(1; +\infty) \supset (2; 4)$.

Chọn đáp án D □

Câu 5. Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu của điểm $M(1; 2; 3)$ trên mặt phẳng (Oyz) là điểm

A. $M_3(0; 2; 3)$. B. $M_4(1; 0; 3)$. C. $M_1(1; 0; 0)$. D. $M_2(1; 2; 0)$.

Lời giải.

Chọn điểm M_3.

Chọn đáp án (A) □

Câu 6. Nếu $\int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ và $\int\limits_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 8$ thì $\int\limits_1^4 2f(x)\,\mathrm{d}x$ bằng

(A) 3. (B) -3. (C) 6. **D** -6.

Lời giải.

$5 = \int\limits_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_4^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x + 8 \Rightarrow \int\limits_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x = -3 \Rightarrow \int\limits_1^4 2f(x)\,\mathrm{d}x = -6$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 7. Nghiệm của phương trình $3^{2x+4} = 9$ là

(A) $x = 0$. (B) $x = 1$. **C** $x = -1$. (D) $x = -2$.

Lời giải.

$3^{2x+4} = 9 \Leftrightarrow 3^{2x+4} = 3^2 \Leftrightarrow 2x + 4 = 2 \Leftrightarrow x = -1$.

Chọn đáp án (C) □

Câu 8. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) \leq 3$ là

(A) $S = [1;8]$. (B) $S = (1;8]$. (C) $S = [1;9]$. **D** $S = (1;9]$.

Lời giải.

$\log_2(x-1) \leq 3 \Leftrightarrow 0 < x - 1 \leq 2^3 \Leftrightarrow 1 < x \leq 9 \Rightarrow S = (1;9]$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 9. Trên mặt phẳng toạ độ, điểm $M(3;-2)$ biểu diễn cho số phức z. Môđun của z bằng

(A) $\sqrt{5}$. (B) 13. (C) 5. **D** $\sqrt{13}$.

Lời giải.

$|z| = OM = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Biết $ABCD$ có chu vi bằng 20, $SA = 10$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

(A) $\frac{250}{6}$. (B) $\frac{200}{6}$. (C) $\frac{200}{3}$. **D** $\frac{250}{3}$.

Lời giải.

Vì $ABCD$ là hình vuông có chu vi bằng 20 nên $AB = \frac{20}{4} = 5$.

$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3}10.5^2 = \frac{250}{3}$.

Chọn đáp án (D) □

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

(A) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln x + C$. (B) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \ln^2 x + C$.

C $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$. (D) $\int f(x)\,\mathrm{d}x = 2\ln^2 x + C$.

Lời giải.

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \int \ln x\ \mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

Chọn đáp án C □

Câu 12. Trong không gian, cho 2023 điểm phân biệt. Có tối đa bao nhiêu mặt phẳng phân biệt tạo bởi 3 trong số 2023 điểm đó?

(A) 2023. (B) 2023!. **(C)** C^3_{2023}. (D) A^3_{2023}.

Lời giải.

Số cách chọn ba điểm tùy ý trong 2023 điểm là C^3_{2023}. Suy ra số tam giác tối đa có thể tạo được từ 3 điểm trong số 2023 điểm đã cho là C^3_{2023}.

Chọn đáp án C □

Câu 13. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số đã cho và trục Ox có bao nhiêu điểm chung?

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

Lời giải.

Từ bảng biến thiên suy ra đồ thị hàm số và trục Ox có 3 điểm chung.

Chọn đáp án A □

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, trục Oz có một vectơ chỉ phương là

(A) $\overrightarrow{n}_3 = (0; 2023; 0)$. (B) $\overrightarrow{n}_2 = (2023; 0; 0)$.

(C) $\overrightarrow{n}_1 = (2023; 2023; 0)$. **(D)** $\overrightarrow{n}_4 = (0; 0; 2023)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{n}_4 = 2023\overrightarrow{k}$ nên chọn vectơ $\overrightarrow{n}_4$.

Chọn đáp án D □

Câu 15. Nếu $\int\limits_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$ thì $\int\limits_0^4 [3f(x) - 2]\ \mathrm{d}x$ bằng

(A) 14. (B) 2. (C) 16. **(D)** -2.

Lời giải.

$$\int\limits_0^4 [3f(x) - 2]\ \mathrm{d}x = 3\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x - 2\int\limits_0^4 \mathrm{d}x = 3\cdot 2 - 2\cdot 4 = -2.$$

Chọn đáp án D □

Câu 16. Công thức tính diện tích của mặt cầu có bán kính r là

(A) $S = 4\pi r^2$. (B) $S = \frac{4}{3}\pi r^2$. (C) $S = \frac{4}{3}\pi r^3$. (D) $S = 4\pi r^3$.

Lời giải.

$S = 4\pi r^2$.

Chọn đáp án A □

Câu 17. Với a, b là các số thực dương thoả mãn $a^4b^6 = 100$ thì $2\log a + 3\log b$ bằng

(A) 4. **(B)** 1. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 2.

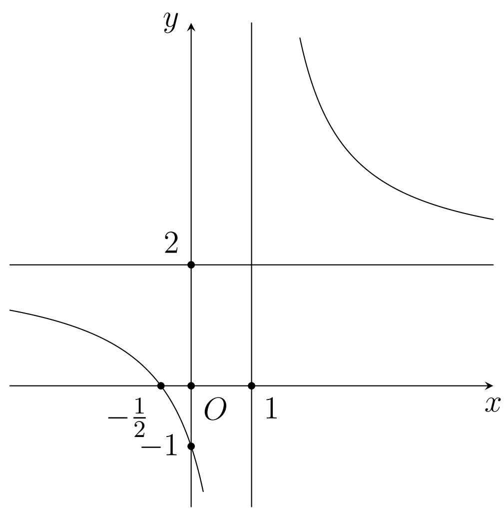
Lời giải.

$a^4b^6 = 100 \Rightarrow \log\left(a^4b^6\right) = \log 100 \Rightarrow 4\log a + 6\log b = 2 \Rightarrow 2\log a + 3\log b = 1.$

Chọn đáp án B □

Câu 18. Đường cong trong hình vẽ là đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, với a, b, c, d là các số thực. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2; 0]$ là

A -1. **B** 0. **C** 2. **D** 1.



Lời giải.

Dựa vào đồ thị hàm số, hàm số nghịch biến trên đoạn $[-2; 0]$, nên giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y(0) = -1$.

Chọn đáp án A □

Câu 19. Đạo hàm của hàm số $y = 23^x$ là

A $y' = 23^x \cdot \ln 23$. **B** $y' = x \cdot 23^{x-1}$. **C** $y' = x23^x \cdot \ln 23$. **D** $y' = \dfrac{23^x}{\ln 23}$.

Lời giải.

$(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$

Chọn đáp án A □

Câu 20. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có thể tích bằng $8a^3$. Diện tích toàn phần của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

A $8a^2$. **B** $16a^2$. **C** $12a^2$. **D** $24a^2$.

Lời giải.

$V_{ABCD.A'B'C'D'} = 8a^3 \Leftrightarrow AB = 2a$.

Diện tích toàn phần của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $6.(2a)^2 = 24a^2$.

Chọn đáp án D □

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Mặt cầu (S) đi qua điểm nào dưới đây?

A $D(9; -1; 1)$. **B** $C(0; 3; 1)$. **C** $A(1; 4; 4)$. **D** $B(1; -2; 2)$.

Lời giải.

Chọn điểm B.

Chọn đáp án D □

Câu 22. Cho số phức $z = 2 - 5i$. Phần thực của số phức iz bằng

A -2. **B** 2. **C** -5. **D** 5.

Lời giải.

$z = 2 - 5i \Rightarrow iz = 2i - 5i^2 = 5 + 2i \Rightarrow$ Phần thực của iz bằng 5.

Chọn đáp án D □

Câu 23. Nếu tăng bán kính đáy của một khối nón lên 2 lần và giữ nguyên chiều cao thì thể tích của khối nón đó tăng lên bao nhiêu lần?

Ⓐ 2. Ⓑ 16. Ⓒ 4. Ⓓ 8.

Lời giải.

Vì $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ nên khi tăng bán kính đáy lên 2 lần và giữ nguyên chiều cao của khối nón thì thể tích của khối nón tăng lên 4 lần.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 24. Tập xác định của hàm số $y = (x-1)^{\sqrt{3}}$ là

Ⓐ $D = [1; +\infty)$. Ⓑ $D = (0; +\infty)$. Ⓒ $D = (1; +\infty)$. Ⓓ $D = [0; +\infty)$.

Lời giải.

Điều kiện xác định $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (1; +\infty) \Rightarrow D = (1; +\infty)$.

Chọn đáp án Ⓒ □

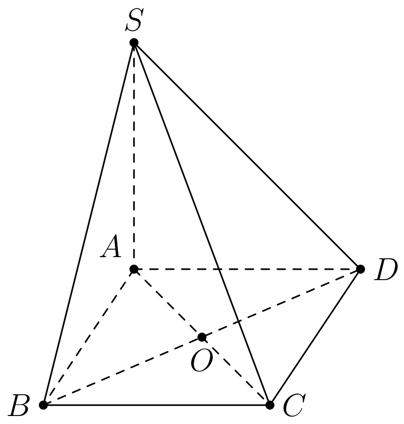
Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi có $AB = AC = 2a$ và cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Tính số đo góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

Ⓐ 120°. Ⓑ 30°. Ⓒ 60°. Ⓓ 90°.

Lời giải.

Ta có $(SAB) \cap (SAD) = SA$. Ta có $AB \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$), $AD \perp SA$ (do $SA \perp (ABCD)$). Vậy góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SAD) bằng góc giữa AB và AD.

Vì $AB = AC = BC = 2a$ nên $\triangle ABC$ đều. Suy ra góc giữa AB và AD bằng góc giữa AB và BC và bằng 60°.



Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 26. Cho khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $3a^3$ và mặt đáy $ABCD$ là hình bình hành. Biết diện tích tam giác SAB bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Khoảng cách giữa SB và CD bằng

Ⓐ $3\sqrt{2}a$. Ⓑ $6\sqrt{2}a$. Ⓒ $6\sqrt{3}a$. Ⓓ $3\sqrt{3}a$.

Lời giải.

Ta có: $CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (SAB)$.

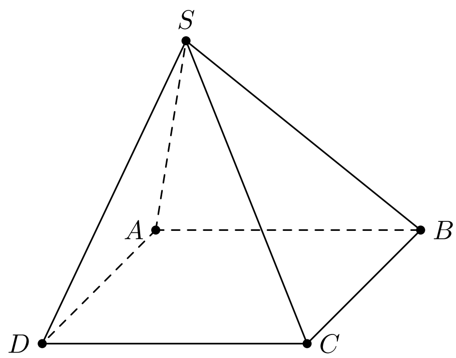
Do đó $\mathrm{d}(CD, SB) = \mathrm{d}(CD, (SAB)) = \mathrm{d}(C, (SAB))$.

Ta lại có $V_{S.ABCD} = 2V_{S.ABC} = 2V_{C.SAB}$.

$\Rightarrow V_{C.SAB} = \frac{V_{S.ABCD}}{2} = \frac{3a^2}{2}$.

Vì $V_{C.SAB} = \frac{1}{3} S_{SAB} \cdot \mathrm{d}(C, (SAB))$

$$\Rightarrow \mathrm{d}(C, (SAB)) = \frac{3V_{C.SAB}}{S_{SAB}} = \frac{\frac{9a^3}{2}}{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}} = 6\sqrt{3}a.$$



Vậy $\mathrm{d}(CD, SB) = 6\sqrt{3}a$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 27. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P) : x - 2y + 2z - 3 = 0$ và mặt cầu $(S) : (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 16$. Số điểm chung của mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) là

Ⓐ 1. Ⓑ 0. Ⓒ 2. **D** vô số.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-1;0)$ và bán kính $R=4$.

Ta có $d(I,(P))=\dfrac{|1-2.(-1)+2.0-3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=0<R$.

Vậy mặt phẳng (P) và mặt cầu (S) có giao tuyến là một đường tròn, tức là có vô số điểm chung.

Chọn đáp án Ⓓ □

Câu 28. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=\left|x^2-3x+2\right|$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

Ⓐ $\dfrac{\pi^2}{30}$. Ⓑ $\dfrac{\pi}{6}$. **C** $\dfrac{\pi}{30}$. Ⓓ $\dfrac{\pi^2}{6}$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm $\left|x^2-3x+2\right|=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$. Vậy

$$V=\pi\int\limits_1^2\left|x^2-3x+2\right|^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30}.$$

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 29. Cho hàm số $y=\dfrac{3}{1-2x}$. Đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

Ⓐ $y=3$. Ⓑ $y=\dfrac{1}{2}$. **C** $y=0$. Ⓓ $y=-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải.

Ta có $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{1-2x}=0$. Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=0$.

Chọn đáp án Ⓒ □

Câu 30. Tổng các nghiệm thực của phương trình $\log_2(x+1)=2\log_4\left(x^2-1\right)$ bằng

A 2. Ⓑ 3. Ⓒ -2. Ⓓ 1.

Lời giải.

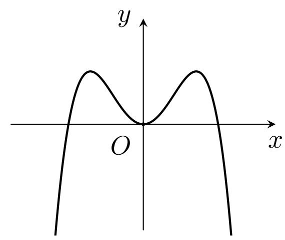
$$\log_2(x+1)=2\log_4\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow\begin{cases}x+1>0\\x+1=x^2-1\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Chọn đáp án Ⓐ □

Câu 31.

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như trong hình bên. Hàm số $y=f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

Ⓐ 2. **B** 1. Ⓒ 3. Ⓓ 0.



Lời giải.

Ta có $f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=x_1\\x=0\quad(x_1<0<x_2).\\x=x_2\end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		0		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	$-\infty$

Quan sát bảng biến thiên ta của hàm số $y = f(x)$ ta thấy hàm số đã cho có 1 cực đại.
Chọn đáp án B □

Câu 32. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

Hỏi hàm số đã cho là hàm số nào trong các hàm số sau?

(A) $y = \dfrac{2x}{x-1}$. **(B)** $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$. (C) $y = \dfrac{2x+3}{x+1}$. (D) $y = \dfrac{2x-1}{x-1}$.

Lời giải.
Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số có hai tiệm cận $x = -1$ và $y = 2$.
Hơn nữa $y' > 0$. Do đó hàm số thỏa mãn là $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.
Chọn đáp án B □

Câu 33. Cho dãy số (u_n) , biết: $u_1 = 2, u_{n+1} = u_n \cdot \dfrac{1}{3}$ với $n \geqslant 1$. Tìm u_{100}.

(A) $\dfrac{2}{3^{100}}$. (B) $\dfrac{4}{3^{999}}$. (C) $\dfrac{4}{3^{99}}$. **(D)** $\dfrac{2}{3^{99}}$.

Lời giải.
Dãy số (u_n) có $u_1 = 2, u_{n+1} = u_n \cdot \dfrac{1}{3}$ với $n \geqslant 1$ là một CSN có $q = \dfrac{1}{3} \Rightarrow u_n = u_1 q^{n-1} = 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$.
Vậy $u_{100} = 2 \cdot \dfrac{1}{3^{99}} = \dfrac{2}{3^{99}}$.
Chọn đáp án D □

Câu 34. Trên giá sách có 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Vật lí và 2 quyển sách Hóa học. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất sao cho 3 quyển lấy ra có ít nhất 1 quyển sách Toán.

(A) $\dfrac{19}{21}$. **(B)** $\dfrac{37}{42}$. (C) $\dfrac{1}{3}$. (D) $\dfrac{5}{6}$.

Lời giải.
Số cách lấy 3 quyển sách một cách tùy ý là C_9^3 cách.
Số cách lấy 3 quyển sách trong đó không có quyển sách Toán nào là C_5^3 cách.
Suy ra, số cách lấy ra 3 quyển sách sao cho có ít nhất 1 quyển sách Toán là $\mathrm{C}_9^3 - \mathrm{C}_5^3$.
Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{\mathrm{C}_9^3 - \mathrm{C}_5^3}{\mathrm{C}_9^3} = \dfrac{37}{42}$.
Chọn đáp án B □

Câu 35. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-6	$\nearrow$	2

Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
B Hàm số có giá trị cực đại bằng -1.
C Hàm số đạt cực đại tại $x = 5$.
D Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -6$.

Lời giải.

Quan sát bảng biến thiên ta thấy tọa độ điểm cực đại $(-1; 5)$ và tọa độ điểm cực tiểu $(2; -6)$. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Chọn đáp án A □

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 2; 4)$ và $B(3; -2; 2)$. Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là

A $2x - 2y - z - 5 = 0$.
B $2x - 2y - z + 1 = 0$.
C $x + 3z + 2 = 0$.
D $x + 3z + 6 = 0$.

Lời giải.

Gọi I là trung điểm của AB thì $I = (1; 0; 3)$.

Có $\overrightarrow{AB} = (4; -4; -2)$.

Phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB :

$2(x-1) - 2(y-0) - 1(z-3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2y - z + 1 = 0$.

Chọn đáp án B □

Câu 37. Trên mặt phẳng toạ độ, tập hợp điểm biểu diễn của các số phức z thoả mãn $|z - 2i| = |\bar{z} + 4|$ là một đường thẳng có phương trình là

A $2x + y + 3 = 0$.
B $x + 2y + 3 = 0$.
C $2x - y + 3 = 0$.
D $x - 2y + 3 = 0$.

Lời giải.

$|z - 2i| = |\bar{z} + 4|$, $z = x + yi \Rightarrow x^2 + (y-2)^2 = (x+4)^2 + (-y)^2 \Leftrightarrow -4y + 4 = 8x + 16 \Leftrightarrow 2x + y + 3 = 0$.

Chọn đáp án A □

Câu 38. Đồ thị hàm số nào sau đây có đúng 1 đường tiệm cận ngang?

A $y = \dfrac{x^2 - x}{x + 1}$.
B $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{5x - 3}$.
C $y = \dfrac{\sqrt{2 - x^2}}{x + 3}$.
D $y = \dfrac{4x - 3}{x^2 - 2x}$.

Lời giải.

Xét hàm số $y = \dfrac{4x - 3}{x^2 - 2x}$ có $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4x - 3}{x^2 - 2x} = 0$.

Vậy đồ thị hàm số có đúng 1 đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Chọn đáp án D □

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi K là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SK} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{SB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SC}$ và L là giao điểm của đường thẳng SK với đường thẳng BC. Biết thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng 56, thể tích khối chóp $S.ABL$ bằng

A 21.
B 32.
C 40.
D 42.

Lời giải.

Cách 1.

Đặt $\overrightarrow{SL} = m\overrightarrow{SK} = \dfrac{m}{4}\overrightarrow{SB} + \dfrac{m}{3}\overrightarrow{SC}$ (1).

Đặt $\overrightarrow{BL} = n\overrightarrow{BC}$ thì suy ra $\overrightarrow{BL} = n\left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}\right) = -n\overrightarrow{SB} + n\overrightarrow{SC}$.

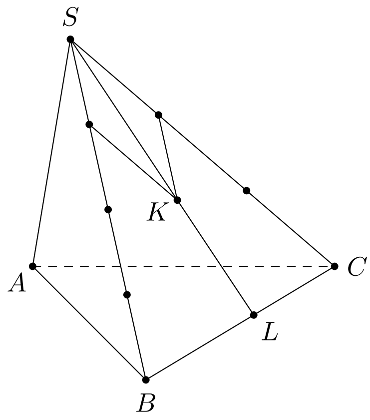
Do đó $\overrightarrow{SL} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BL} = (1-n)\overrightarrow{SB} + n\overrightarrow{SC}$ (2).

Do $\overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{SC}$ không cùng phương nên từ (1) và (2) suy ra

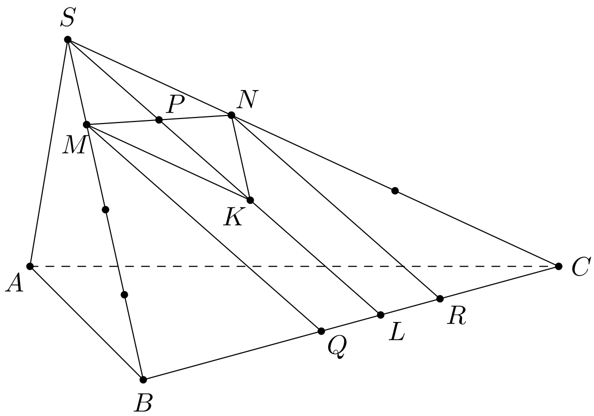
$$\begin{cases} \dfrac{m}{4} = 1 - n \\ \dfrac{m}{3} = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{12}{7} \\ n = \dfrac{4}{7} \end{cases}.$$

Vậy $\overrightarrow{BL} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{BC}$ hay L thuộc đoạn BC và $BL = \dfrac{4}{7}BC$.

Từ đó suy ra $V_{S.ABL} = \dfrac{4}{7}V_{S.ABC} = \dfrac{4}{7}.56 = 32$.



Cách 2.



Gọi M, N lần lượt là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SC}$; P là trung điểm MN, thế thì

$$\overrightarrow{SK} = 2\overrightarrow{SP} = \overrightarrow{SM} + \overrightarrow{SN}.$$

Qua M, N kẻ các đường thẳng song song với SL, cắt BC lần lượt tại Q, R. Khi đó PL là đường trung bình của hình thang $MNRQ$ nên L là trung điểm QR. Mặt khác, theo định lí Thales thì

$$\frac{LQ}{LB} = \frac{SM}{SB} = \frac{1}{4}, \quad \frac{LR}{LC} = \frac{SN}{SC} = \frac{1}{3}.$$

Từ đó

$$BC = LB + LC = 4LQ + 3LR = 7LQ \Rightarrow \frac{BL}{BC} = \frac{4}{7}.$$

Từ đó suy ra $V_{S.ABL} = \dfrac{4}{7}V_{S.ABC} = \dfrac{4}{7} \cdot 56 = 32$.

Chọn đáp án B □

Câu 40. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x+y-z+2=0$ và $(Q): x+3y=12$. Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (Q). Đường thẳng Δ song song với đường thẳng nào dưới đây?

A $d_3: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-6}{2}$.

B $d_4: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$.

C $d_2: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$.

D $d_1: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z-6}{2}$.

Lời giải.

Có $\overrightarrow{n}_P = (1;1;-1)$ và $\overrightarrow{n}_Q = (1;3;0)$. Suy ra $\left[\overrightarrow{n}_P; \overrightarrow{n}_Q\right] = (3;-1;2)$.

Vì Δ là giao tuyến của (P) và (Q) nên Δ có một vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u} = \left[\overrightarrow{n}_P; \overrightarrow{n}_Q\right] =$

$(3; -1; 2)$. Do đó loại d_3 và d_4.
Xét d_1 đi qua $M(0; 4; 6)$ mà $M \in (P), M \in (Q)$ nên $d_1 \equiv \Delta$. Loại d_1.
Chọn đáp án C □

Câu 41. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $[0; 1]$, thoả mãn $\int\limits_{-2}^{-1} f(x+2)\,\mathrm{d}x = 3$ và $f(1) = 4$. Khi đó tích phân $I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, f'(\sin x)\,\mathrm{d}x$ bằng

A 4. B 1. C 2. D 5.

Lời giải.

$$\int\limits_{-2}^{-1} f(x+2)\,\mathrm{d}x = 3,\ t = x+2 \Rightarrow \int\limits_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 3.$$

$$I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\, f'(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x \,.\cos x . f'(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{0}^{1} 2t.f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Đặt $\begin{cases} u = 2t \\ \mathrm{d}v = f'(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}u = 2\,\mathrm{d}t \\ v = f(t) \end{cases} \Rightarrow I = \int\limits_{0}^{1} 2t\,.f'(t)\,\mathrm{d}t = 2t.f(t)\big|_0^1 - \int\limits_{0}^{1} f(t)\,.2\,\mathrm{d}t$

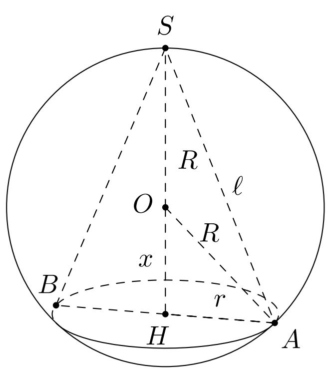
$$\Rightarrow I = 2.f(1) - 2\int\limits_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\cdot 4 - 2\cdot 3 = 2.$$

Chọn đáp án C □

Câu 42. Cho một mặt cầu và một hình nón nội tiếp trong mặt cầu. Thiết diện qua trục của hình nón là một tam giác nhọn, không đều và diện tích xung quanh của hình nón bằng $\frac{3}{8}$ diện tích mặt cầu. Gọi α là góc giữa đường sinh và mặt đáy của hình nón. Biết $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{a} - b}{c}$ với a, b, c là các số nguyên dương đôi một nguyên tố cùng nhau. Tổng $a + b + c$ bằng

A 16. B 28. C 26. D 18.

Lời giải.



Cách 1. Gọi R, r lần lượt là bán kính mặt cầu và bán kính đáy hình nón, l là độ dài đường sinh của hình nón, x là khoảng cách từ tâm mặt cầu đến đáy của hình nón, $x < R$.
Ta có $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ và $l = \sqrt{(R+x)^2 + r^2} = \sqrt{(R+x)^2 + R^2 - x^2} = \sqrt{2R^2 + 2xR}$.

Diện tích xung quanh của hình nón $S_1 = \pi r l = \pi\sqrt{R^2 - x^2}.\sqrt{2R^2 + 2Rx}$.
Diện tích mặt cầu $S_2 = 4\pi R^2$.
Theo bài ra $\frac{3}{8} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi\sqrt{R^2 - x^2}.\sqrt{2R^2 + 2Rx}}{4\pi R^2} = \frac{1}{4}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2}.\sqrt{2 + 2\frac{x}{R}}$.
Đặt $t = \frac{x}{R}, t < 1$ thì ta có $\sqrt{1 - t^2}.\sqrt{2 + 2t} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left(1 - t^2\right)(2 + 2t) = \frac{9}{4} \Leftrightarrow 8t^3 + 8t^2 - 8t + 1 = 0$
$\Leftrightarrow (2t - 1)\left(4t^2 + 6t - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{4} \end{array}\right.$. Ta loại trường hợp $t = \frac{-3 - \sqrt{13}}{4}$.
Ta có $\cos\alpha = \frac{r}{l} = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{\sqrt{2R^2 + 2xR}} = \sqrt{\frac{1 - t^2}{2 + 2t}}$.
Với $t = \frac{1}{2}$ thì $\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$, loại do thiết diện là tam giác không đều.
Với $t = \frac{-3 + \sqrt{13}}{4}$ thì $\cos\alpha = \sqrt{\frac{7 - \sqrt{13}}{8}} = \sqrt{\frac{14 - 2\sqrt{13}}{16}} = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{13} - 1\right)^2}{4^2}} = \frac{\sqrt{13} - 1}{4}$.
Vậy $a = 13, b = 1, c = 4 \Rightarrow a + b + c = 18$.
Cách 2. Gọi 2β là góc ở đỉnh S của hình nón. Xét thiết diện SAB qua trục của hình nón thì $\widehat{ASH} = \beta$ và $\widehat{SAH} = \alpha$, với H là trung điểm AB (hình vẽ). Khi đó, theo giả thiết, ta có

$$\pi r\ell = \frac{3}{8}4\pi R^2 \Rightarrow r\ell = \frac{3}{2}R^2.$$

Đặt $t = \cos\alpha > 0$ thì

$$t = \cos\alpha = \frac{r}{\ell} = \frac{3}{2}\left(\frac{R}{\ell}\right)^2.$$

Ta lại có

$$\frac{1}{2}\ell^2 \sin 2\beta = S_{SAB} = \frac{2r\ell^2}{4R} = \frac{r\ell^2}{2R} = \frac{\frac{3}{2}R^2\ell}{2R} = \frac{3}{4}R\ell.$$

Để ý $\sin\beta = \cos\alpha$, $\cos\beta = \sin\alpha = \sqrt{1 - t^2}$ nên từ đẳng thức trên, ta được

$$t\sqrt{1 - t^2} = \sin\beta\cos\beta = \frac{3}{4}\cdot\frac{R}{\ell} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}t}$$

$$\Rightarrow t^3 - t + \frac{3}{8} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{4}. \end{array}\right.$$

Lưu ý, tam giác SAB không đều nên $t \neq \frac{1}{2}$, mà $t > 0$ nên $t = \frac{\sqrt{13} - 1}{4}$. Vậy $a = 13$, $b = 1$, $c = 4$ và $a + b + c = 18$.
Chọn đáp án D □

Câu 43. Gọi S là tập các số nguyên dương a để bất phương trình $6^x + 2^{a+2} < 4 \cdot 3^x + 2^{x+a}$ có ít nhất 1 và không quá 10 nghiệm nguyên. Tổng các phần tử của S bằng

A. 204. B. 201. C. 205. D. 208.

Lời giải.
Bất phương trình đã cho tương đương

$$6^x - 2^{x+a} + 2^{a+2} - 4 \cdot 3^x < 0 \Leftrightarrow (2^x - 4)(3^x - 2^a) < 0.$$

Ta có các trường hợp (TH) sau

TH1. $a\log_3 2 \le 2$. Do a nguyên nên $a \le 3$. Khi đó bất phương trình tương đương

$$a\log_3 2 < x < 2.$$

Do $a\log_3 2 > 0$ nên hiển nhiên bất phương trình có không quá 10 nghiệm nguyên. Bất phương trình có ít nhất 1 nghiệm nguyên khi và chỉ khi

$$a\log_3 2 < 1 \Leftrightarrow a < \log_2 3 \approx 1{,}6.$$

Vậy $a = 1$.

TH2. $a\log_3 2 > 2$. Do a nguyên nên $a \ge 4$. Khi đó bất phương trình tương đương

$$2 < x < a\log_3 2.$$

Dẫn đến bất phương trình có ít nhất 1 và không quá 10 nghiệm nguyên, khi và chỉ khi

$$3 < a\log_3 2 \le 13 \Leftrightarrow 4{,}6 \approx 3\log_2 3 < a \le 13\log_2 3 \approx 20{,}6.$$

Suy ra $5 \le a \le 20$.

Vậy $S = \{1; 5; 6; \ldots; 20\}$ và tổng các phần tử của S là $1 + 5 + 6 + \cdots + 20 = 201$.
Chọn đáp án B □

Câu 44. Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2023; 2023)$ để hàm số $y = x^2 - 2m|x - m + 6| + 1$ có ba điểm cực trị?

A 2021. B 2019. C 2018. D 2020.

Lời giải.

Nếu $m = 0$: $y = x^2 + 1$, hàm số có một điểm cực trị.
Nếu $m \ne 0$, ta có

$$y = \begin{cases} x^2 - 2m(x - m + 6) & (x - m + 6 \ge 0) \\ x^2 + 2m(x - m + 6) & (x - m + 6 < 0) \end{cases} \Rightarrow y' = \begin{cases} 2x - 2m & (x - m + 6 > 0) \\ 2x + 2m & (x - m + 6 < 0). \end{cases}$$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x = m - 6$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - 2m = 0 \\ x - m + 6 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x + 2m = 0 \\ x - m + 6 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ \begin{cases} x = -m \\ -2m + 6 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = m \\ x = -m\,(m > 3). \end{array}\right.$$

Để hàm số có ba điểm cực trị, ta phải có $m > 3$ và lúc này bảng xét dấu của y' như sau

x	$-\infty$		$-m$		$m-6$		m		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	

Điều này chứng tỏ với $m > 3$ thì hàm số đã cho có 3 điểm cực trị, mà m nguyên nên $m \in \{4, 5, \ldots, 2022\}$.
Vậy có tất cả 2019 số nguyên thoả mãn.
Chọn đáp án B □

Câu 45. Trên tập số phức, xét phương trình $z^2 - (m-2)z + m^2 = 0$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình đã cho có hai nghiệm z_1, z_2 thoả mãn $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$?

(A) 2. (B) 4. (C) 1. $\boxed{\text{D}}$ 3.

Lời giải.

Cách 1. Ta có $\Delta = (m-2)^2 - 4m^2 = -3m^2 - 4m + 4 = (m+2)(-3m+2)$. Ta xét các trường hợp (TH) sau

TH1. $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow m \in \left[-2; \dfrac{2}{3}\right]$. Khi đó ta có

$$|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| \Leftrightarrow z_1 z_2 = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (thỏa mãn)}.$$

TH2. $\Delta < 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -2) \cup \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$. Ta có $z_{1,2} = \dfrac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$. Kết hợp định lí Viète, ta có

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1 - z_2| &\Leftrightarrow |m-2| = \left|i\sqrt{|\Delta|}\right| \Leftrightarrow |m-2| = \sqrt{|-3m^2 - 4m + 4|} \\ &\Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 = \left|-3m^2 - 4m + 4\right|. \end{aligned}$$

Chú ý $-3m^2 - 4m + 4 < 0$ nên

$$\begin{aligned} m^2 - 4m + 4 = 3m^2 + 4m - 4 &\Leftrightarrow m^2 + 4m - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 + 2\sqrt{2} \\ m = -2 - 2\sqrt{2}. \end{array}\right. \end{aligned}$$

Cả hai giá trị trên đều thỏa mãn.

Vậy có 3 giá trị của m thoả mãn yêu cầu bài toán.

Cách 2. Theo định lí Viète, ta có $z_1 + z_2 = m - 2$ và $z_1 z_2 = m^2$. Suy ra

$$|z_1 - z_2|^2 = \left|(z_1 + z_2)^2 - 4z_1 z_2\right| = \left|(m-2)^2 - 4m^2\right| = \left|3m^2 + 4m - 4\right|.$$

Từ giả thiết, ta có

$$\begin{aligned} (m-2)^2 = \left|3m^2 + 4m - 4\right| &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (m-2)^2 = 3m^2 + 4m - 4 \\ (m-2)^2 = -3m^2 - 4m + 4 \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 + 4m - 4 = 0 \\ m^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \pm 2\sqrt{2} \\ m = 0. \end{array}\right. \end{aligned}$$

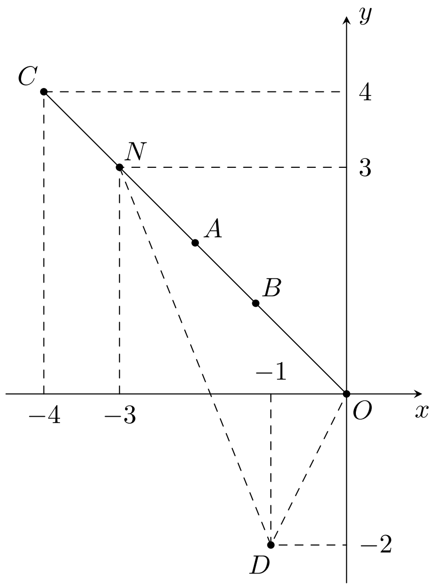
Vậy có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu.

Chọn đáp án (D) □

Câu 46. Xét hai số phức z, w thỏa mãn $|z - w| = \sqrt{2}$ và $|\bar{z} + 4 + 4i| + |w| = 3\sqrt{2}$. Biết biểu thức $P = |w + 1 + 2i|$ đạt giá trị lớn nhất khi $w = w_0$, giá trị $|w_0 + 2 - i|$ bằng

(A) $\sqrt{41}$. (B) $\sqrt{10}$. $\boxed{\text{C}}$ $\sqrt{5}$. (D) $\sqrt{17}$.

Lời giải.



Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của z, $w \Rightarrow \begin{cases} |z-w| = AB = \sqrt{2} \\ |z| = OA; |w| = OB. \end{cases}$ Xét điểm $C(-4;4)$

$\left|\overline{z+4+4i}\right| + |w| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow |z+4-4i| + |w| = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow AC + OB = 3\sqrt{2}$.

$\Rightarrow OB + BA + AC = OC = 4\sqrt{2} \Rightarrow O, B, A, C$ theo thứ tự nằm trên đoạn OC.

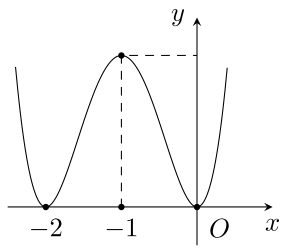
Xét điểm $D(-1;-2) \Rightarrow P = |w+1+2i| = BD \Rightarrow P_{\max} = DN = \sqrt{29}$ khi B trùng với $N(-3;3)$

$\Rightarrow w_0 = -3+3i \Rightarrow |w_0 + 2 - i| = |-1+2i| = \sqrt{5}$

Chọn đáp án C □

Câu 47.

Cho $f(x)$ là một hàm số có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f\left(\log_2\left(x^2+2x+2\right)\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $f(2x-1)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. B $(2;3)$. C $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$. D $(3;4)$.

Lời giải.

Cách 1. Đặt $2x - 1 = \log_2\left(t^2+2t+2\right)$, $g(t) = f\left(\log_2\left(t^2+2t+2\right)\right)$. Ta có

$$g'(t) = \frac{2(t+1)}{\log_2(t^2+2t+2)\ln 2} \cdot f'\left(\log_2\left(t^2+2t+2\right)\right).$$

Do đó với $t > -1$ thì $g'(t)$ và $f'\left(\log_2(t^2+2t+2)\right)$ cùng dấu, $t < -1$ thì $g'(t)$ và $f'\left(\log_2(t^2+2t+2)\right)$ trái dấu. Đặt $h(t) = \log_2\left(t^2+2t+2\right)$, ta có $h'(t) = \dfrac{2(t+1)}{(t^2+2t+2)\ln 2}$, từ đó, ta có bảng biến thiên của $h(t)$

t	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
$h'(t)$		$-$	0	$+$	
$h(t)$	$+\infty$ ↘	1 ↘	0	↗ 1	↗ $+\infty$

Dựa vào đồ thị đã cho $g'(t) < 0$ khi $-1 < t < 0$, do đó $f'\left(\log_2\left(t^2+2t+2\right)\right) < 0$ khi $-1 < t < 0$, khi đó $0 < \log_2\left(t^2+2t+2\right) < 1$, suy ra $f'(2x-1) < 0$ khi $0 < 2x-1 < 1$, hay $\frac{1}{2} < x < 1$.

Cách 2. Đặt $u = u(x) = \log_2\left(x^2+2x+2\right)$, ta có $u'(x) = \dfrac{2(x+1)}{(x^2+2x+1)\ln 2}$. Để ý rằng, với $u'(x) \neq 0$ thì $f'(u) = \dfrac{[f(u(x))]'}{u'(x)}$, do đó $f'(u) \geq 0$ nếu $f(u(x))$ và $u(x)$ đơn điệu cùng chiều, $f'(u) \leq 0$ nếu $f(u(x))$ và $u(x)$ đơn điệu ngược chiều. Do đó, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
$u(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$f(u(x))$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
$f'(u)$		$+$	|	$-$	|	$-$	|	$+$	

Từ bảng biến thiên trên, ta có $f'(u) < 0$ khi $0 < u < 1$. Suy ra $2f'(2x-1) = [f(2x-1)]' < 0$ khi $0 < 2x-1 < 1$ hay $\frac{1}{2} < x < 1$.

Chọn đáp án C □

Câu 48. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ thoả mãn $f(x) = f'(x) + 2(3x+1)e^x, \forall x \in \mathbb{R}$ và $f(1) = -3e$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = 2f(x)$ và $y = f'(x)$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A $(20;30)$. **B** $(10;20)$. **C** $(0;10)$. **D** $(30;40)$.

Lời giải.

$f(x) = f'(x) + 2(3x+1)e^x, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = -6x-2, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left(f(x)e^{-x}\right)' = -6x-2 \Rightarrow f(x)e^{-x} = -3x^2-2x+C \Rightarrow f(x) = \left(-3x^2-2x+C\right)e^x$.

Mà $f(1) = -3e \Rightarrow (C-5)e = -3e \Rightarrow C = 2 \Rightarrow f(x) = \left(-3x^2-2x+2\right)e^x$

$\Rightarrow f'(x) = \left(-3x^2-8x\right)e^x \Rightarrow 2f(x) - f'(x) = \left(-3x^2+4x+4\right)e^x$.

$$2f(x) - f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2+4x+4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\frac{2}{3}. \end{array}\right.$$

$$S = \int_{-\frac{2}{3}}^{2} \left|2f(x) - f'(x)\right| \mathrm{d}x = \int_{-\frac{2}{3}}^{2} \left|-3x^2+4x+4\right| e^x \,\mathrm{d}x \approx 21{,}97.$$

Chọn đáp án A □

Câu 49. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = -2+t \end{cases}$ và mặt cầu $(S) : (x-2-m)^2 + (y-1+m)^2 + (z-2+m)^2 = 25$, với m là tham số. Gọi I là tâm của (S). Khi Δ cắt (S) tại hai điểm có khoảng cách lớn nhất, OI bằng

A $\sqrt{19}$. **B** $2\sqrt{19}$. **C** 3. **D** $\sqrt{3}$.

Lời giải.

Ta có $I\left(2+m,1-m,2-m\right)$. Suy ra I thuộc đường thẳng $d:\begin{cases}x=2+t'\\y=1-t'\\z=2-t'\end{cases}$.

Dễ thấy Δ và d là hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau.
Mặt khác (S) có bán kính bằng 5.
Khi Δ cắt (S) tại hai điểm, gọi A, B là hai giao điểm và h là khoảng cách từ I đến Δ. Ta có $\dfrac{AB}{2}=\sqrt{R^2-h^2}=\sqrt{25-h^2}$. Do đó để AB lớn nhất thì h phải nhỏ nhất.
Ta thấy h nhỏ nhất bằng khoảng cách giữa Δ và d. Khi đó I là một điểm đầu của đoạn vuông góc chung của Δ và d.
Dễ tìm được $I=(2;1;2)$ và điểm đầu còn lại của đoạn vuông góc chung là $J\left(3;3;1\right)$. Ta có $h_{\text{min}}=\sqrt{6}$ và $OI=3$.
Chọn đáp án C □

Câu 50. Xét các số thực dương a, b thoả mãn $\log_2\left(a+b\right)=\log_3\left(a^2+b^2\right)$. Khi đó a^3+b^3 có thể nhận nhiều nhất bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 36. B. 35. C. 37. D. 38.

Lời giải.

Đặt $\log_2\left(a+b\right)=\log_3\left(a^2+b^2\right)=x\Rightarrow\begin{cases}a+b=2^x\\a^2+b^2=3^x\end{cases}$.
Vì $\left(a+b\right)^2\le 2\left(a^2+b^2\right)\Leftrightarrow x\le\log_{\frac{4}{3}}2$.
Ta có $a^3+b^3=\left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)=-\dfrac{1}{2}8^x+\dfrac{3}{2}6^x=f(x)$
Lập bảng biến thiên của $f(x)$ ta suy ra hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;\log_{\frac{4}{3}}2\right]$
Suy ra $0<a^3+b^3=f(x)\le f\left(\log_{\frac{4}{3}}2\right)\approx 37{,}48$.
Chọn đáp án C □

——— HẾT ———