Công thức Logarit

1. Định nghĩa Logarit

Logarit (viết tắt là Log) là phép toán nghịch đảo của phép lũy thừa. Theo đó, logarit của một số a là số mũ của cơ số b (có giá trị cố định), phải được nâng lũy thừa để tạo thành số a đó.

Hiểu một cách đơn giản hơn, **logarit** là một phép nhân có số lần lặp đi lặp lại, ví dụ $\log_a x = y$ sẽ tương đương với $a^y = x$. Nếu **logarit** cơ số 10 của 1000 là 3, ta có, $10^3 = 1000$ nghĩa là $1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$ hay $\log_{10} 1000 = 3$.

Tóm lại, lũy thừa của các số dương với số mũ bất kỳ luôn có kết quả là một số dương. Do đó, **logarit** dùng để tính toán phép nhân của 2 số dương bất kỳ luôn đi kèm điều kiện có 1 số dương ≠ 1.

Ta có thể tóm tắt ngắn gọn như sau:

Cho hai số dương a, b với a ≠ 1. Nghiệm duy nhất của phương trình $a^n = b$ được gọi là $\log_a b$ (số n có tính chất là $a^n = b$).

Như vậy $\log_a b = n \Leftrightarrow a^n = b$.

Ví dụ: $\log_4 16 = 2$ vì $4^2 = 16$.

Ngoài ra còn có **Logarit** tự nhiên (còn gọi là Logarit Nêpe) là **Logarit** cơ số e do nhà toán học John Napier sáng tạo ra. Ký hiệu là lnx hay $\log_e x$. Logarit tự nhiên của một số x là bậc của số e sao cho số e lũy thừa lên bằng x, nghĩa là $\ln x = a \Leftrightarrow e^a = x$. Số e có giá trị xấp xỉ bằng 2,71828.

2. Quy tắc tính Logarit

2.1. Logarit của một tích

Công thức logarit của một tích như sau: $\log_\alpha(ab) = \log_\alpha b + \log_\alpha c$; Điều kiện: a, b, c đều là số dương với a # 1.

Đây là logarit hai số a và b thực hiện theo phép nhân thông qua phép cộng logarit ra đời vào thế kỷ 17. Sử dụng bảng logarit, ta sẽ đưa logarit về cơ số a = 10 là logarit thập phân sẽ dễ dàng tra bảng, tính toán hơn. Logarit tự nhiên với hằng số e là cơ số (khoảng bằng 2,718) được áp dụng thuận tiện trong toán học. Logarit nhị phân có cơ số 2 được dùng trong khoa học máy tính.

Nếu muốn thu nhỏ phạm vi các đại lượng, bạn dùng thang logarit.

2.2. Logarit của lũy thừa

Ta có công thức logarit như sau: $log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$ điều kiện với mọi số α và a, b là số dương với a # 1.

3. Công thức Logarit

a. Các công thức Logarit đầy đủ

Bảng công thức:

Cho 00 và x,y>0

$log_a 1 = 0, log_a a = 1$	$log_a(\frac{x}{y}) = -log_a(\frac{y}{x})$
$log_a a^m = m$	$log_a x^\alpha = \alpha log_a x, log_a x^2 = 2log_a\|x\|$
$a^{log_a b} = b$	$log_{u^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} log_u x, log_{a^\beta} x^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} log_a x$
$log_a(x.y) = log_a x + log_b y$	$lgb = logb = log_{10} b$ (logarit thập phân)
$log_a(\frac{x}{y}) = log_a x - log_a y, log_a(\frac{1}{y}) = -log_a y$	$lnb = log_e b, e = 2,718...$

b. Công thức đạo hàm Logarit

Đạo hàm của hàm số sơ cấp	Đạo hàm của hàm số hợp
$(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^\alpha.u'$
$(a^x)' = a^x.lna$	$(a^u)' = a^\alpha.u'.lnu$
$(lnx)' = \frac{1}{x}$	$(lnu)' = \frac{u'}{u}$
$(log_a x)' = \frac{1}{x.lna}$	$(log_a u)' = \frac{u'}{u.lna}$

c. Công thức mũ Logarit

$a^n = a.a....a$ (n thừa số a)	$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
$a^0 = 1\forall$ a #0	$(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m.n}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$
$a^m . a^n = a^{m+n}$	$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^{\frac{-m}{n}} = \frac{a}{\frac{a^m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$
$(ab)^n = a^n . b^n$	$\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} a, n = 2k+1 \\ \lvert a \rvert, n = 2k \end{cases}$

d. Công thức Logarit Nepe

Một số công thức thường gặp cần lưu ý:

$lnb = log_e b, e = 2,718...$

$(lnx)' = \frac{1}{x}$

$(a^x)' = a^x . lna$

$(a^u)' = a^\alpha . u' . lnu$

$(lnu)' = \frac{u'}{u}$

4. Cách sử dụng bảng Logarit

Với bảng logarit, bạn sẽ tính toán nhanh hơn rất nhiều so với máy tính, đặc biệt khi muốn tính toán nhanh hoặc nhân số lớn, sử dụng logarit thuận tiện hơn cả.

4.1. Cách tìm Logarit nhanh

Để tìm logarit nhanh, bạn cần chú ý các thông tin sau đây:

- Chọn bảng đúng: Hầu hết các bảng logarit là cho logarit cơ số 10 được gọi là logarit thập phân.
- Tìm ô đúng: Giá trị của ô tại các giao điểm của hàng dọc và hàng ngang.
- Tìm số chính xác nhất bằng cách sử dụng các cột nhỏ hơn ở phía bên phải của bảng. Sử dụng cách này trong trường hợp số có 4 hoặc nhiều hơn.
- Tìm tiền tố trước một số thập phân: Bảng logarit cho bạn biết tiền tố trước một số thập phân. Phần sau dấu phẩy gọi là mantissa.
- Tìm phần nguyên. Cách này dễ tìm nhất đối với logarit cơ số 10. Bạn tìm bằng cách đếm các chữ số còn lại của số thập phân và trừ đi một chữ số.

4.2. Cách tìm Logarit nâng cao

Muốn giải những phương trình logarit nâng cao, bạn cần lưu ý những điều sau đây:

- Hiểu logarit là gì? Ví dụ, 10^2 là 100, 10^3 là 1000. Như vậy số mũ 2,3 là logarit cơ số 10 của 100 và 1000. Mỗi bảng logarit chỉ có thể sử dụng được với một cơ số nhất định. Cho đến nay, loại bảng logarit phổ biến nhất là logarit cơ số 10, còn gọi là logarit phổ thông.
- Xác định đặc tính của số mà bạn muốn tìm logarit
- Khi tra bảng logarit, bạn nên dùng ngón tay cẩn thận tra hàng dọc ngoài cùng bên trái để tính logarit trong bảng. Sau đó, bạn trượt ngón tay để tra điểm giao giữa hàng dọc và hàng ngang.
- Nếu bảng logarit có một bảng phụ nhỏ dùng để tính toán phép tính lớn hay muốn tìm giá trị chính xác hơn, bạn trượt tay đến cột trong bảng đó được đánh dấu bằng chữ số tiếp theo của số bạn đang tìm kiếm.
- Thêm các số được tìm thấy trong 2 bước trước đó với nhau.
- Thêm đặc tính: Khi tra ra điểm giao của hai hàng ra số cần tìm, bạn thêm đặc tính với mantissa ở trên để có kết quả tính logarit của mình.

5. Bài tập Logarit

Bài 1:

a/ Tìm tập xác định D của hàm số y = (x2 – 3x + 2)100.

A. D = [1;2]

B. D = [2; +∞) ∪ (-∞; 1]

C. D = R

D. D = (1;2)

b/Tìm tập xác định D của hàm số y = (x3 – 8)-100.

A. D = (2; +∞) B.

D = R \ {2}

C. D = (-∞; 2) D

D = [-2; +∞) ∪ (-∞; 2]

Bài 2:

a/ Tìm tập xác định D của hàm số y = (x^3 – 8)0

A. D = (2; +∞)

B. D = R \ {2}

C. D = (-∞; 2) D.

D = (-2; +∞) ∪ (-∞; 2)

b/ Tìm x để biểu thức $(x^2 - 1)^{(1/3)}$ có nghĩa:

A. ∀x ∈ (-∞; 1] ∪ [1; +∞).

B. ∀x ∈ (-∞; -1) ∪ (1; +∞).

C. ∀x ∈ (-1;1).

D. ∀x ∈ R \ {±1}.

Bài 3:

a/ Tìm tập xác định D của hàm số y = $(x2 – 6x + 8)^{1/100}$

A. D = R

B. D= [4; +∞) ∪ (-∞; 2]

C. D= (4; +∞) ∪ (-∞; 2)

D. D = [2;4]

b/ Tìm x để biểu thức (2x – 1)-2 có nghĩa:

A. ∀ x ≠1/2

B. ∀ x < 1/2

C. ∀x∈(1/2; 2)

D. ∀ x≥1/2

Bài 4: Tìm tập xác định D của hàm số y = $(x^2 – 6x + 8)^{\sqrt{2}}$

A. D = R

B. D= [4; +∞) ∪ (-∞; 2]

C. D= (4; +∞) ∪ (-∞; 2)

D. D = [2;4]

Bài 5: Tìm x để biểu thức $(x^2 + x + 1)^{-2/3}$ có nghĩa:

A: R

B. Không tồn tại x

C. x<1

D. $\forall x \in R\setminus\{0\}$

Bài 6: Cho $(\sqrt{2} + 1)^{x} = 3$. hãy tính giá trị của biểu thức $A = (\sqrt{2} - 1)^{2x} + (3 + 2\sqrt{2})^{x}$

A. A = 18

B. A = 0

C. A = 82/9

D. A = 28/9

Bài 7: Cho 5x = 4 hãy tính giá trị của biểu thức $T = 25x – 52\text{-}x + 5^{x/2}$

A. T = 14

B. T = 47/4

C. T = 118

D. T = 6

Bài 8: Cho $a = 2^{x}$; $b = 5^{x}$. Hãy biểu diễn $T = 20^{x} + 50^{x}$ theo a và b

A. T = ab(a + b)

B. T = ab/(a+b)

C. $T = a^{2} + ab^{2}$

D. $T = ab + a^{2}b$

Bài 9:

a/ Cho $a^{-\sqrt{3}}<a^{-\sqrt{2}}$ và $a^{x} < b^{x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng

A. 1 < a < b < 0

B. 1 < b < a < 0

C. a < b < 1

D. b < a < 1

b/ So sánh hai số m và n nếu $(\sqrt{2})^{m} > (\sqrt{2})^{n}$

A m < n.

B. m = n.

C. m > n.

D. Không so sánh được.

Bài 10:

a/ So sánh hai số m và n nếu $(1/9)^m < (1/9)^n$

A. Không so sánh được.

B. m = n.

C. m < n.

D. m > n.

b/ So sánh hai số m và n nếu $(\sqrt{3}/2)^m < (\sqrt{3}/2)^n$

A. m > n.

B. m = n.

C. m < n.

D. Không so sánh được.