SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THANH HÓA	KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH LỚP 12 (LẦN 1) NĂM HỌC 2023 - 2024
ĐỀ THI CHÍNH THỨC **Mã đề thi: 107**	**MÔN THI: TOÁN** *Thời gian làm bài: 90 phút, không kể thời gian phát đề* *(Đề thi có 6 trang, gồm 50 câu)*

Họ, tên thí sinh:..; Số báo danh:..

Chữ ký của cán bộ coi thi 1: ....; Chữ ký của cán bộ coi thi 2: ....

Câu 1. Biết $\int\limits_1^3 f(x)dx = 2; \int\limits_1^3 g(x)dx = 3$. Tính $\int\limits_1^3 \left(f(x)+g(x)\right)dx$.

A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 2. Có bao nhiêu cách xếp 4 học sinh vào một bàn dài?

A. 24. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 6.

Câu 3. Nghiệm của phương trình $3^{x-2} = 9$ là

A. $x=5$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=4$. **D.** $x=1$.

Câu 4. Tập xác định của hàm số $y=(x+1)^{-3}$ là

A. $(-1;+\infty)$. **B.** $[-1;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 5. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=x^3+3x$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $M=0$. **B.** $M=14$. **C.** $M=-2$. **D.** $M=4$.

Câu 6. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x+1}{x+2}$ là đường thẳng có phương trình :

A. $x=-2$. **B.** $y=-2$. **C.** $x=2$. **D.** $x=-1$.

Câu 7. Đạo hàm của hàm số $y=\log x$ trên $(0;+\infty)$ là

A. $y'=\dfrac{x}{\ln 10}$. **B.** $y'=\dfrac{1}{x}$. **C.** $y'=\dfrac{1}{x\ln 10}$. **D.** $y'=\dfrac{1}{x\log e}$.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$. Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a$, $x=b$ quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V=\pi\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **B.** $V=\int\limits_a^b \left|f(x)\right|\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int\limits_b^a f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int\limits_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Câu 9. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2\left(x^2-1\right)=3$.

A. $S=\{-3\}$. **B.** $S=\{3\}$. **C.** $S=\{2\}$. **D.** $S=\{\pm 3\}$.

Câu 10. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-4}$ với trục hoành là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -1.

Câu 11. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=-4$ và công sai $d=3$. Tính u_4.

A. $u_4=-1$. **B.** $u_4=-500$. **C.** $u_4=500$. **D.** $u_4=5$.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$ ↘		1	↗	5	↘	$-\infty$

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

A. $(2;5)$. **B.** $x=0$. **C.** $x=2$. **D.** $(0;1)$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=5x^4+3x^2+1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

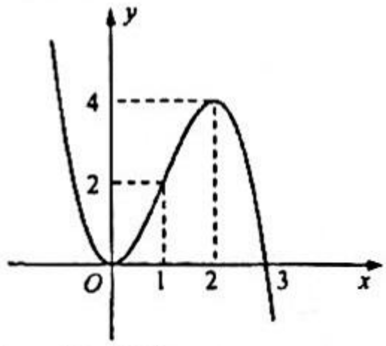
A. $\int f(x)dx=x^5+x^3+C$.

B. $\int f(x)dx=x^5+x^3+\frac{1}{2}x^2+C$.

C. $\int f(x)dx=20x^5+12x^3+x+C$.

D. $\int f(x)dx=x^5+x^3+x+C$.

Câu 14. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 15. Cho hàm số $f(x)=x+e^{2x+1}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{e^{2x+1}}{2}+C$.

B. $\int f(x)dx=x^2+e^{2x+1}+C$.

C. $\int f(x)dx=2e^{2x+1}+C$.

D. $\int f(x)dx=\frac{x^2}{2}+e^{2x+1}+C$.

Câu 16. Biết rằng đường thẳng $y=-2x+2$ cắt đồ thị hàm số $y=x^3+x+2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0;y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm x_0+y_0

A. $x_0+y_0=1$. **B.** $x_0+y_0=4$. **C.** $x_0+y_0=2$. **D.** $x_0+y_0=3$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-1), B(2;3;5)$. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

A. $M(2;2;6)$. **B.** $M(1;2;-2)$. **C.** $M(2;4;4)$. **D.** $M(1;2;2)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình: $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=9$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính r của mặt cầu.

A. $I(-1;-4;-3), r=9$.

B. $I(1;4;3), r=9$.

C. $I(-1;-4;-3), r=3$.

D. $I(1;4;3), r=3$.

Câu 19. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2.f(x)-3=0$ là

A. 3. B. 5. C. 4. D. 2.

Câu 20. Cho hình nón có bán kính đáy $r=8$ và độ dài đường sinh $l=3$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng:

A. 64π. B. 192π. C. 24π. D. 48π.

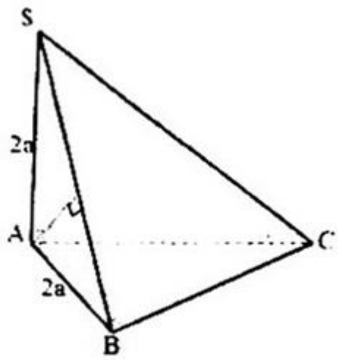
Câu 21. Khối lăng trụ có thể tích bằng 12, diện tích đáy bằng 4 thì chiều cao của khối lăng trụ bằng

A. 3. B. 48. C. 9. D. 4.

Câu 22. Trong hộp có 4 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 6 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên từ hộp 3 viên bi. Số cách lấy là

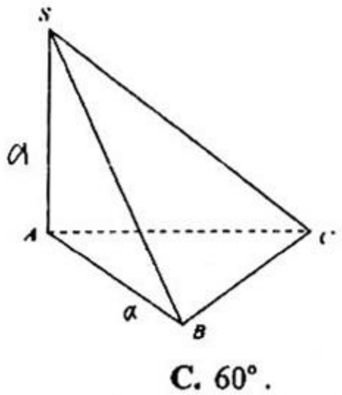
A. C_{15}^3. B. A_{15}^3. C. $C_4^3+C_5^3+C_6^3$. D. 9.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $SA=AB=2a$, tam giác ABC vuông tại B (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng



A. $a\sqrt{2}$. B. a. C. $2a$. D. $a\sqrt{3}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$; tam giác ABC đều cạnh a và $SA=a$ (tham khảo hình vẽ). Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC).



A. $135°$. B. $90°$. C. $60°$. D. $45°$.

Câu 25. Tính diện tích toàn phần của khối bát diện đều có cạnh bằng 2.

A. $4\sqrt{3}$. B. $16\sqrt{3}$. C. $8\sqrt{3}$. D. $\sqrt{3}$.

Câu 26. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị $y=x^3-3x$ cắt đường thẳng $y=m$ tại ba điểm phân biệt. Số phần tử của tập S bằng

A. 3. B. 4. C. 2. D. 5.

Câu 27. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\ln(-x^2-3x+4)$.

A. $D=[-4;1]$. B. $D=(-4;1)$.

C. $D=(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$. D. $D=(-1;4)$.

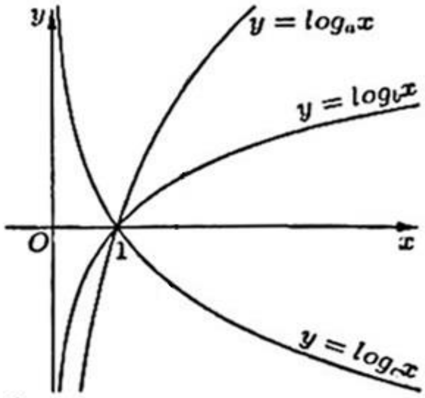
Câu 28. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=2$. B. $x=3$. C. $x=1$. D. $x=0$.

Câu 29. Biết $F(x)=e^x+x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng

A. $\frac{1}{2}e^{2x}+2x^2+C.$ B. $2e^x+2x^2+C.$ C. $e^{2x}+4x^2+C.$ D. $\frac{1}{2}e^{2x}+x^2+C.$

Câu 30. Cho a,b,c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y=\log_a x$, $y=\log_b x$, $y=\log_c x$.



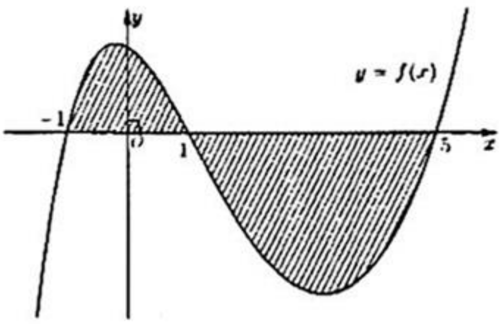
Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $c<a<b$. B. $a<b<c$. C. $a<c<b$. D. $c<b<a$.

Câu 31. Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log\left(x^2+2x+3\right)\le\log 6$.

A. 5. B. -5. C. 7. D. 4.

Câu 32. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=-1, x=5$.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5}f(x)\mathrm{d}x$. B. $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{5}f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{5}f(x)\mathrm{d}x$. D. $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5}f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 33. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2+4x-4y+2z=0$. Biết rằng mặt cầu cắt mặt phẳng (Oxy) theo giao tuyến là đường tròn tâm H. Tìm tọa độ điểm H.

A. $H(2;-2;0)$. B. $H(-2;2;0)$. C. $H(-2;2;-1)$. D. $H(0;0;-1)$.

Câu 34. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x+m-m^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x)=f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

A. 0.　　**B.** 1.　　**C.** 2.　　**D.** 3.

Câu 35. Hàm số $f(x)=\int_1^{x^3}(t-1)dt, x\in\mathbb{R}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 0.　　**B.** 1.　　**C.** 3.　　**D.** 2.

Câu 36. Trong không gian $Oxyz$, gọi S là tập các giá trị của m để điểm $A(1;2;m^2-2m)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy). Số phần tử của tập S là

A. 3.　　**B.** 2.　　**C.** 0.　　**D.** 1.

Câu 37. Kim tự tháp Kê - ốp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao là 147 m, cạnh đáy là 230 m. Thể tích của nó là

A. $2952100\ m^3$.　　**B.** $2592100\ m^3$.　　**C.** $2591200\ m^3$.　　**D.** $2529100\ m^3$.

Câu 38. Cho khối chóp $S.ABC$, có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau, $SA=2a, SB=a\sqrt{5}, SC=a\sqrt{7}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

A. $R=8a$.　　**B.** $R=a$.　　**C.** $R=2a$.　　**D.** $R=4a$.

Câu 39. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC}=60^0$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD. Biết khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a}{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.　　**B.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.　　**C.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.　　**D.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$.

Câu 40. Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\frac{\log_2(x^3)-\log_2^2(2x)+13}{\left|x^3-4x^2+5x-2\right|}\geq 0$.

A. 136.　　**B.** 133.　　**C.** 135.　　**D.** 153.

Câu 41. Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\sqrt{3}$ và $\widehat{SAO}=30^0, \widehat{SAB}=60^0$. Diện tích tam giác SAB bằng:

A. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.　　**B.** $3\sqrt{2}$.　　**C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.　　**D.** $3\sqrt{5}$.

Câu 42. Cho hàm số $f(x)=\ln\left[x(x^2+1)\right]+3x+\frac{m}{x}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m với $0<m<68$ sao cho hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$. Có tất cả bao nhiêu phần tử thuộc S?

A. 49.　　**B.** 48.　　**C.** 47.　　**D.** 50.

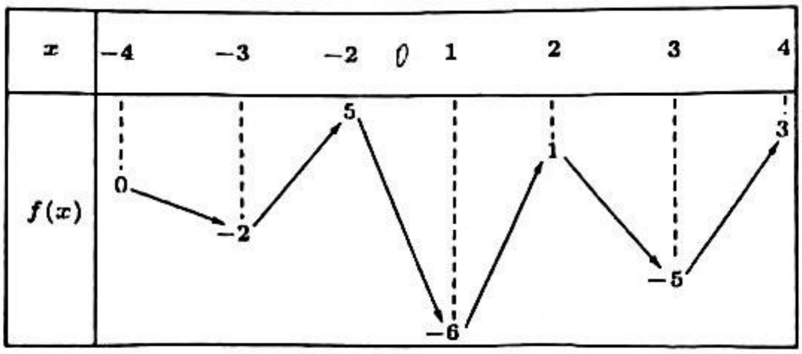
Câu 43. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;0)$; $B(3;-1;2)$; $C(1;2;2)$; $D(3;-1;1)$ và điểm $M\in(Oxy)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=MA^2+2MB^2-MC^2-\frac{1}{4}MD^4$.

A. 6.　　**B.** 1.　　**C.** $\frac{7}{4}$.　　**D.** $\frac{15}{4}$.

Câu 44. Biết $\int_1^4\sqrt{\frac{1}{4x}+\frac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}dx=a+e^b-e^c$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $T=a-b-c$.

A. $T=6$.　　**B.** $T=-3$.　　**C.** $T=-5$.　　**D.** $T=3$.

Câu 45. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới



Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x)=\left|f(x^3+2x)+f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

A. 9. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 46. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{2}\log_{2024} a=\log_{2024}\frac{1}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4a+b^2-3\log_3\left(4a+b^2\right)$ được viết dưới dạng $x-y\log_3 z$, với x,y,z là các số nguyên dương lớn hơn 2. Khi đó, tổng $(x+2y+z)^2$ có giá trị bằng

A. 196. **B.** 121. **C.** 144. **D.** 225.

Câu 47. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên tập số thực $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$f'(x)\left[3f^2(x)+1\right]=9x^8+21x^6+15x^4+6x^2+1,\forall x\in\mathbb{R}, f(0)=0.$$

Tính $\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{f(x)}{x^4+1}\right)^{2023}+\left(e^x+e^{-x}\right)f(x)+\frac{f^2(x)}{e^x+1}\right]dx.$

A. 0. **B.** $\frac{77}{105}$. **C.** $\frac{73}{105}$. **D.** $\frac{92}{105}$.

Câu 48. Cho hai hàm số $f(x),g(x)$ có đạo hàm trên tập số thực $\mathbb{R}$ và thỏa mãn

$$\begin{cases}\ln\left[4f(x)-4x^2+12x+1\right]+f(x)-x^2+3x=0\\ g(x)=x^3-x^2+f(x)+\log m\end{cases},\forall x\in\mathbb{R}.$$

Tìm tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình: $g(3.g(x))+8g(x)=3x$ có 3 nghiệm phân biệt?

A. 24531. **B.** 24310. **C.** 24090. **D.** 23871.

Câu 49. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}2^{x^2}-4^{y+1}=2y+2-x^2\\ 4x^3+2(2y+2)=\sqrt{(x^4+1)\left[x^4+16(2y+2)+8x+1\right]}\end{cases}$.

Biết hệ có một nghiệm $(x_0;y_0),x_0>0,$ với $x_0=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{-b+c\sqrt{2}}}{2}$ trong đó a,b,c là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $N=b+c-a$ bằng

A. 8. **B.** 6. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 50. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$, $BCC'B'$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A,B,C,M,N,P bằng

A. $7\sqrt{3}$. **B.** $9\sqrt{3}$. **C.** $12\sqrt{3}$. **D.** $10\sqrt{3}$.

---------------------- HẾT ----------------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA

KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH LỚP 12
(LẦN 1) NĂM HỌC 2023 - 2024

ĐỀ CHÍNH THỨC
Môn thi: TOÁN

Câu 1: Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = -4$ và công sai $d = 3$. Tính u_4.

A. $u_4 = -1$. **B.** $u_4 = 5$. **C.** $u_4 = 500$. **D.** $u_4 = -500$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $u_4 = u_1 + 3d = 5$.

Câu 2: Có bao nhiêu cách xếp 4 học sinh vào một bàn dài?

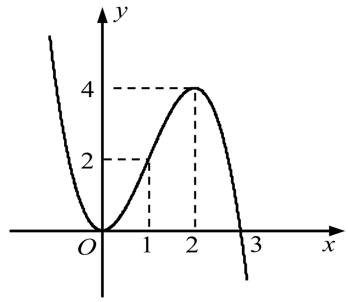
A. 24. **B.** 6. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Mỗi cách xếp là một hoán vị của bốn phần tử nên số cách xếp là $4! = 24$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ bằng

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là

A. $x = 0$. **B.** $x = 2$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(2;5)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 5: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = x^3 + 3x$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $M = 4$. **B.** $M = -2$. **C.** $M = 0$. **D.** $M = 14$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = x^3 + 3x \Rightarrow y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = x^3 + 3x$ đồng biến trên tập số thực, nên giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng $y(2) = 14$.

Câu 6: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x+1}{x+2}$ là đường thẳng có phương trình :

A. $y = -2$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = -2$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\lim\limits_{x \to -2^+} y = +\infty$.

Câu 7: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x+2}{x-4}$ với trục hoành là

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Với $y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+2}{x-4} = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Nên đồ thị cắt trục hoành tại một điểm.

Câu 8: Đạo hàm của hàm số $y = \log x$ trên $(0;+\infty)$ là

A. $y' = \dfrac{1}{x\ln 10}$. **B.** $y' = \dfrac{x}{\ln 10}$. **C.** $y' = \dfrac{1}{x}$. **D.** $y' = \dfrac{1}{x\log e}$.

Lời giải

Chọn A

$y = \log x \Rightarrow y' = \dfrac{1}{x\ln 10}$.

Câu 9: Nghiệm của phương trình $3^{x-2} = 9$ là

A. $x = -1$. **B.** $x = 4$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 5$.

Lời giải

Chọn B

$3^{x-2} = 9 \Leftrightarrow 3^{x-2} = 3^2 \Leftrightarrow x - 2 = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

Câu 10: Tập xác định của hàm số $y = (x+1)^{-3}$ là

A. $[-1;+\infty)$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định của hàm số $y = (x+1)^{-3}$ là $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ nên tập xác định là $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Câu 11: Tìm tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x^2 - 1) = 3$.

A. $S = \{3\}$. **B.** $S = \{\pm 3\}$. **C.** $S = \{-3\}$. **D.** $S = \{2\}$.

Lời giải

Chọn B

$\log_2\left(x^2-1\right)=3 \Leftrightarrow x^2-1=2^3 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow x=\pm 3.$

Câu 12: Cho hàm số $f(x)=5x^4+3x^2+1$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx = x^5+x^3+x+C$.

B. $\int f(x)dx = 20x^5+12x^3+x+C$.

C. $\int f(x)dx = x^5+x^3+C$.

D. $\int f(x)dx = x^5+x^3+\frac{1}{2}x^2+C$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\int f(x)dx=\int\left(5x^4+3x^2+1\right)dx=x^5+x^3+x+C.$

Câu 13: Biết $\int_1^3 f(x)dx=2; \int_1^3 g(x)dx=3$. Tính $\int_1^3\left(f(x)+g(x)\right)dx.$

A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\int_1^3\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_1^3 f(x)dx+\int_1^3 g(x)dx=2+3=5.$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)=x+e^{2x+1}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\int f(x)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{e^{2x+1}}{2}+C$.

B. $\int f(x)dx=\frac{x^2}{2}+e^{2x+1}+C$.

C. $\int f(x)dx=2e^{2x+1}+C$.

D. $\int f(x)dx=x^2+e^{2x+1}+C$.

Lời giải

Chọn A

$\int f(x)dx=\int\left(x+e^{2x+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{e^{2x+1}}{2}+C.$

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$. Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a,\ x=b$ quanh trục hoành được tính theo công thức

A. $V=\int_a^b\left|f(x)\right|\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **C.** $V=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$. **D.** $V=\pi\int_b^a f^2(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn B

Câu 16: Khối lăng trụ có thể tích bằng 12, diện tích đáy bằng 4 thì chiều cao của khối lăng trụ bằng

A. 3. **B.** 9. **C.** 48. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có $V=B.h \Rightarrow h=\frac{V}{B}=3.$

Câu 17: Cho hình nón có bán kính đáy $r=8$ và độ dài đường sinh $l=3$. Diện tích xung quanh của hình nón bằng:

A. 24π . **B**. 192π . **C**. 48π . **D**. 64π .

Lời giải

Chọn A

Ta có $S_{xq} = \pi rl = 24\pi.$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu có phương trình: $(x-1)^2+(y-4)^2+(z-3)^2=9$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính r của mặt cầu.

A. $I(1;4;3), r=3$. **B**. $I(1;4;3), r=9$. **C**. $I(-1;-4;-3), r=3$. **D**. $I(-1;-4;-3), r=9$.

Lời giải

Chọn A

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-1), B(2;3;5)$. Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là

A. $M(1;2;2)$. **B**. $M(1;2;-2)$. **C**. $M(2;2;6)$. **D**. $M(2;4;4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 1 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 2. \\ z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 2 \end{cases}$

Câu 20: Tính diện tích toàn phần của khối bát diện đều có cạnh bằng 2.

A. $4\sqrt{3}$. **B**. $8\sqrt{3}$. **C**. $16\sqrt{3}$. **D**. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B

Hình bát diện đều có tám mặt, mỗi mặt là một tam giác đều, vì mỗi cạnh bằng 2 nên diện tích một mặt là $2^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$. Vậy diện tích toàn phần bằng $8\sqrt{3}$.

Câu 21: Trong hộp có 4 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ, 6 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên từ hộp 3 viên bi. Số cách lấy là

A. 9. **B**. C_{15}^3. **C**. A_{15}^3. **D**. $C_4^3 + C_5^3 + C_6^3$.

Lời giải

Chọn B

Tổng số bi trong hộp là 15 viên nên số cách lấy 3 viên từ hộp là C_{15}^3.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2.f(x)-3=0$ là

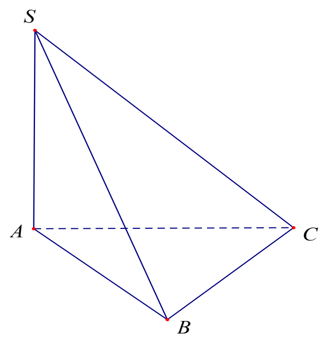
A. 3. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2.f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}$ nên số nghiệm của phương trình bằng số giao điểm của đồ thị $y=f(x)$ và đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$.

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$; tam giác ABC đều cạnh a và $SA=a$ (tham khảo hình vẽ). Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC).



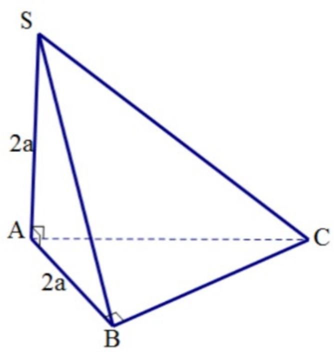
A. 60°. **B.** 45°. **C.** 135°. **D.** 90°.

Lời giải

Chọn B

Ta có ΔSAC vuông cân tại A, $\widehat{SC;(ABC)}=\widehat{SCA}=45^{0}$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, $SA=AB=2a$, tam giác ABC vuông tại B (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng



A. $a\sqrt{3}$. **B.** a. **C.** $2a$. **D.** $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi H là trung điểm của SB, do tam giác SAB cân tại A nên $AH \perp SB$, mặt khác theo giả thiết $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A;(SBC)) = AH = a\sqrt{2}$.

Câu 25: Biết rằng đường thẳng $y = -2x + 2$ cắt đồ thị hàm số $y = x^3 + x + 2$ tại điểm duy nhất; kí hiệu $(x_0; y_0)$ là tọa độ của điểm đó. Tìm $(x_0 + y_0)$.

A. $x_0 + y_0 = 1$. **B.** $x_0 + y_0 = 3$. **C.** $x_0 + y_0 = 2$. **D.** $x_0 + y_0 = 4$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm là:

$x^3 + x + 2 = -2x + 2 \Leftrightarrow x^3 + 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x_0 + y_0 = 2.$

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x = 2$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu đạo hàm.

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 3$.

Câu 27: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị $y = x^3 - 3x$ cắt đường thẳng $y = m$ tại ba điểm phân biệt. Số phần tử của tập S bằng

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = x^3 - 3x \Rightarrow y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow y_{CD} = 2, y_{CT} = -2.$ Để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị $y = x^3 - 3x$ thì $y_{CT} < m < y_{CD} \Leftrightarrow -2 < m < 2$, vì m nguyên nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Câu 28: Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\log(x^2 + 2x + 3) \le \log 6$.

A. -5. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

$\log\left(x^2+2x+3\right)\le\log 6\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2x+3\le 6\\x^2+2x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow x^2+2x-3\le 0\Leftrightarrow -3\le x\le 1$. Vậy tổng tất cả các nghiệm nguyên của x bằng: $-3-2-1+0+1=-5$.

Câu 29: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\ln\left(-x^2-3x+4\right)$.

A. $D=(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$. **B.** $D=(-4;1)$.

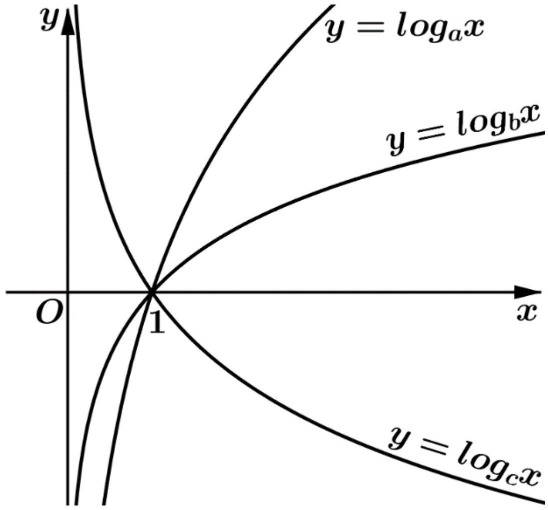
C. $D=[-4;1]$. **D.** $D=(-1;4)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định là $-x^2-3x+4>0\Leftrightarrow -4<x<1$. Vậy tập xác định $D=(-4;1)$.

Câu 30: Cho a,b,c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của ba hàm số $y=\log_a x,\ y=\log_b x,\ y=\log_c x$.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $a<c<b$. **B.** $a<b<c$. **C.** $c<b<a$. **D.** $c<a<b$.

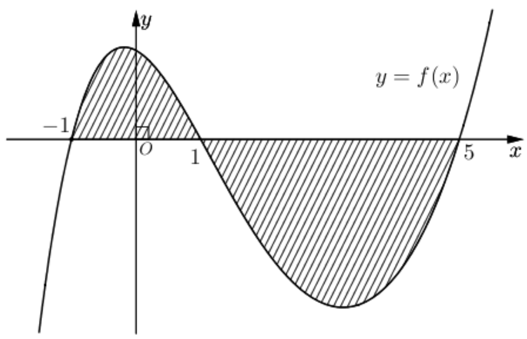
Lời giải

Chọn D

Nhìn đồ thị ta có $y=\log_a x,\ y=\log_b x$ là các hàm số đồng biến nên $a>1;b>1$ và hàm số $y=\log_c x$ nghịch biến nên $0<c<1$.

Kẻ đường thẳng $y=1$ trên cùng hệ trục đã cho thì đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị $y=\log_a x,\ y=\log_b x$ lần lượt tại các điểm có hoành độ là a,b, nhận thấy $a<b\Rightarrow c<a<b$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ dưới. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$, trục hoành và các đường thẳng $x=-1, x=5$.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

B. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x-\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

D. $S=-\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x+\int_{1}^{5} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $S=\int_{-1}^{5}\left|f(x)\right|dx=\int_{-1}^{1}\left|f(x)\right|dx+\int_{1}^{5}\left|f(x)\right|dx=\int_{-1}^{1} f(x)dx-\int_{1}^{5} f(x)dx.$

Vì: $f(x)\geq 0,\forall x\in[-1;1]; f(x)\leq 0,\forall x\in[1;5].$

Câu 32: Biết $F(x)=e^x+x^2$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$. Khi đó $\int f(2x)dx$ bằng

A. $2e^x+2x^2+C.$ **B.** $\frac{1}{2}e^{2x}+x^2+C.$ **C.** $\frac{1}{2}e^{2x}+2x^2+C.$ **D.** $e^{2x}+4x^2+C.$

Lời giải

Chọn C

Ta có $\int f(2x)dx=\frac{1}{2}\int f(2x)d(2x)=\frac{1}{2}\int f(t)dt=\frac{1}{2}\left(e^t+t^2\right)+C$ với $t=2x.$

Vậy $\int f(2x)dx=\frac{1}{2}e^{2x}+2x^2+C.$

Câu 33: Hàm số $f(x)=\int_{1}^{x^2}(t-1)dt, x\in\mathbb{R}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f(x)=\int_{1}^{x^2}(t-1)dt=\frac{x^4}{2}-x^2+\frac{1}{2}\Rightarrow f'(x)=2x\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-1\end{array}\right.$ do 3 nghiệm này phân biệt nên hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 34: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $x^2+y^2+z^2+4x-4y+2z=0$. Biết rằng mặt cầu cắt mặt phẳng (Oxy) theo giao tuyến là đường tròn tâm H. Tìm tọa độ điểm H.

A. $H(-2;2;0)$. **B.** $H(-2;2;-1)$. **C.** $H(0;0;-1)$. **D.** $H(2;-2;0)$.

Lời giải

Chọn A

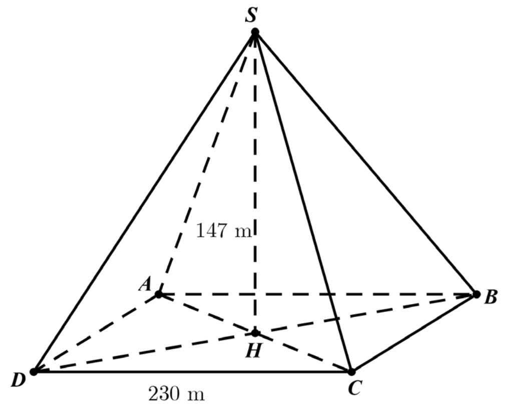
Ta có tâm mặt cầu là $I(-2;2;-1)$ nên H chính là hình chiếu của I trên (Oxy), hay $H(-2;2;0)$.

Câu 35: Kim tự tháp Kê - ốp ở Ai Cập được xây dựng vào khoảng 2500 năm trước Công nguyên. Kim tự tháp này là một khối chóp tứ giác đều có chiều cao là 147 m, cạnh đáy là 230 m. Thể tích của nó là

A. $2592100\ \text{m}^3$. **B.** $2952100\ \text{m}^3$. **C.** $2529100\ \text{m}^3$. **D.** $2591200\ \text{m}^3$.

Lời giải

Chọn A



Gọi khối chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 230 m ; chiều cao $SH = 147$ m.

Thể tích của nó là: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.S_{ABCD}.SH = \frac{1}{3}.\left(230^2\right).147 = 2592100$.

Vậy thể tích Kim tự tháp là $2592100\ \text{m}^3$.

Câu 36: Cho khối chóp $S.ABC$, có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau, $SA = 2a, SB = a\sqrt{5}, SC = a\sqrt{7}$. Tính bán kính R của mặt cầu ngoại tiếp khối chóp $S.ABC$.

A. $R = 4a$. **B.** $R = a$. **C.** $R = 2a$. **D.** $R = 8a$.

Lời giải

Chọn C

$R = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + SB^2 + SC^2} = 2a.$

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, gọi S là tập các giá trị của m để điểm $A\left(1;2;m^2 - 2m\right)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy). Số phần tử của tập S là

A. 1. **B.** 0 . **C.** 2 . **D.** 3 .

Lời giải

Chọn C

$A\left(1;2;m^2 - 2m\right) \in (Oxy) \Leftrightarrow z_A = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right.$.

Câu 38: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right) = x^2 - 2x + m - m^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g\left(x\right) = f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

Để hàm số $g\left(x\right) = f\left(|x|\right)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $y = f\left(x\right)$ có 2 cực trị dương, hay phương trình $f'\left(x\right) = x^2 - 2x + m - m^2 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt, điều kiện cần và đủ là:

$$\begin{cases} \Delta = m^2 - m + 1 > 0 \\ x_1 + x_2 = 2 > 0 \\ x_1.x_2 = m - m^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 1.$$

Vậy không có giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 39: Cho hàm số $f(x) = \ln\left[x(x^2+1)\right] + 3x + \dfrac{m}{x}$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m với $0 < m < 68$ sao cho hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;\, 2)$. Có tất cả bao nhiêu phần tử thuộc S?

A. 50. **B.** 49. **C.** 48. **D.** 47.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D = (0;\, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{3x^2+1}{x(x^2+1)} + 3 - \frac{m}{x^2}.$$

Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;\, 2)$ khi và chỉ khi $f'(x) \le 0,\ \forall x \in (0;\, 2)$ (do phương trình $f'(x) = 0$ tại hữu hạn nghiệm thuộc khoảng $(0;\, 2)$)

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+1}{x(x^2+1)} + 3 \le \frac{m}{x^2} \Leftrightarrow \frac{3x^3+x}{x^2+1} + 3x^2 \le m \ \ (1),\ \forall x \in (0;\, 2).$$

Xét hàm số $g(x) = \dfrac{3x^3+x}{x^2+1} + 3x^2,\ x \in (0;\, 2)$. $g'(x) = \dfrac{3x^4+8x^2+1}{(x^2+1)^2} + 6x > 0,\ \forall x \in (0;\, 2)$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$

x	0	2
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	0 ↗	$\dfrac{86}{5}$

Từ bảng biến thiên ta thấy (1) đúng với mọi $x \in (0;2)$ khi và chỉ khi $m \ge \dfrac{86}{5}$.

Do $m \in (0;\, 68)$ và m là số nguyên nên $m \in S = \{18;19;...;67\}$.

Vậy số phần tử thuộc S là 50.

Câu 40: Tính tổng tất cả các nghiệm nguyên của bất phương trình $\dfrac{\log_2(x^3) - \log_2^2(2x) + 13}{\left|x^3 - 4x^2 + 5x - 2\right|} \ge 0$.

A. 133. **B.** 136. **C.** 153. **D.** 135.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $\begin{cases} x>0 \\ \left|x^3-4x^2+5x-2\right| \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 1; x\neq 2 \end{cases}$.

Với điều kiện suy ra bất phương trình: $\dfrac{\log_2\left(x^3\right)-\log_2^2(2x)+13}{\left|x^3-4x^2+5x-2\right|} \geq 0$

$\Leftrightarrow 3\log_2 x-\left(1+\log_2 x\right)^2+13 \geq 0 \Leftrightarrow -\left(\log_2 x\right)^2+\log_2 x+12 \geq 0 \Leftrightarrow -3 \leq \log_2 x \leq 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{8} \leq x \leq 16$

(thoả mãn).

Với điều kiện trên và $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{3;4;5;\ldots;16\}$.

Do đó tổng các nghiệm nguyên của bất phương trình là $3+4+5+\ldots+16=133$.

Câu 41: Biết $\int_1^4 \sqrt{\dfrac{1}{4x}+\dfrac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}\,dx = a+e^b-e^c$ với a,b,c là các số nguyên. Tính $T=a-b-c$.

A. $T=-3$. **B**. $T=3$. **C**. $T=6$. **D**. $T=-5$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\dfrac{1}{4x}+\dfrac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{e^x}\right)^2$ nên

$\int_1^4 \sqrt{\dfrac{1}{4x}+\dfrac{\sqrt{x}+e^x}{\sqrt{x}e^{2x}}}\,dx=\int_1^4\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{e^x}\right)dx=\left(\sqrt{x}-e^{-x}\right)\Big|_1^4=1+e^{-1}-e^{-4}$.

Suy ra $a=1$, $b=-1$, $c=-4$.

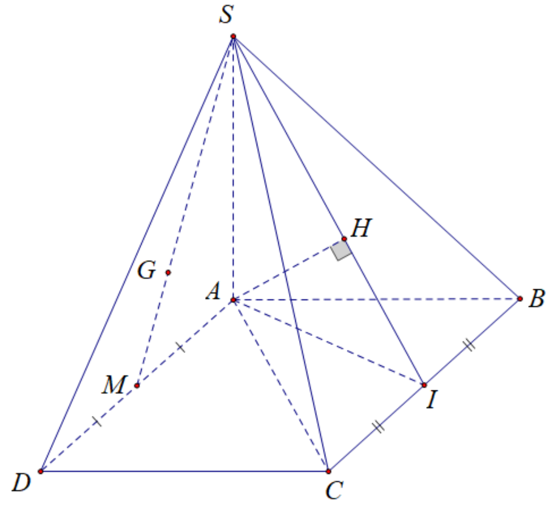
Vậy $T=6$.

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, góc $\widehat{ABC}=60^0$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD. Biết khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) bằng $\dfrac{a}{3}$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

A. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{8}$. **B**. $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}$. **C**. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{18}$. **D**. $\dfrac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I, H lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên BC và SI, ta có

$$\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AI \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} BC \perp (SAI) \\ AH \subset (SAI) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ AH \perp SI \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A,(SBC)) = AH \ \ (1)$$

Gọi M là trung điểm AD, G là trọng tâm ΔSAD, ta có:

$$MS = \frac{3}{2}GS \Rightarrow d(M,(SBC)) = \frac{3}{2}d(G,(SBC)) = \frac{3}{2}.\frac{a}{3} = \frac{a}{2} = d(A,(SBC))\ (2)\ (\text{do } AD \parallel (SBC))$$

Từ (1) và (2) suy ra $AH = \frac{a}{2}$.

Mặt khác tam giác ABC là tam giác đều cạnh a nên $AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trong tam giác vuông SAI có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AI^2} \Rightarrow SA = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Diện tích đáy $S_{ABCD} = 2.S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.SA.S_{ABCD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$.

Câu 43: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;0)$; $B(3;-1;2)$; $C(1;2;2)$; $D(3;-1;1)$ và điểm $M \in (Oxy)$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = MA^2 + 2MB^2 - MC^2 - \frac{1}{4}MD^4$.

A. 1. **B.** $\frac{7}{4}$. **C.** $\frac{15}{4}$. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

+) Gọi $I(x_I; y_I; z_I)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow I(3;-1;1)$. Suy ra $I \equiv D$.

+) Ta có $T = MA^2 + 2MB^2 - MC^2 - \frac{1}{4}MD^4$

$$= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 - \frac{1}{4}MI^4 = 2MI^2 - \frac{1}{4}MI^4 + \left(IA^2 + 2IB^2 - IC^2\right).$$

+) $\overrightarrow{IA}=(-2;3;-1);\overrightarrow{IB}=(0;0;1);\overrightarrow{IC}=(-2;3;1)$. Suy ra $IA^2+2IB^2-IC^2=14+2-14=2$)

Đặt $MI^2=x$. Ta có $T=2x-\dfrac{1}{4}x^2+2$.

+) Gọi H là hình chiếu của I trên (Oxy). Ta có $MI\geq IH=1, \forall M\in(Oxy)$.

+) Xét hàm số $y=f(x)=-\dfrac{1}{4}x^2+2x+2$, với $x\in[1;+\infty)$. $f'(x)=-\dfrac{1}{2}x+2$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=4$

Bảng biến thiên:

x	1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{15}{4}$	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

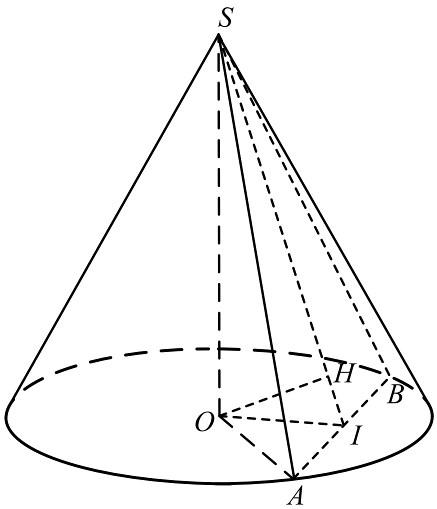
Vậy $\max T=6$, khi $x=4$, hay $MI=2$ và $M\in(Oxy)$.

Câu 44: Cho hình nón đỉnh S, đường cao SO, A và B là hai điểm thuộc đường tròn đáy sao cho khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SAB) bằng $\sqrt{3}$ và $\widehat{SAO}=30^0, \widehat{SAB}=60^0$. Diện tích tam giác SAB bằng:

A. $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi I là trung điểm của $AB\Rightarrow OI\perp AB$.

Gọi H là hình chiếu của O lên $SI\Rightarrow OH\perp SI$.

Ta có: $\begin{cases} OI\perp AB \\ OS\perp AB \end{cases}\Rightarrow OH\perp(SAB)\Rightarrow d(O;(SAB))=OH=\sqrt{3}$

Xét tam giác SAO vuông tại O có: $\sin\widehat{SAO}=\dfrac{SO}{SA}\Rightarrow SO=\dfrac{SA}{2}$

Xét tam giác SAI vuông I có: $\sin\widehat{SAI}=\dfrac{SI}{SA}\Rightarrow SI=\dfrac{SA\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác SOI vuông tại O có: $\dfrac{1}{OH^2}=\dfrac{1}{OI^2}+\dfrac{1}{OS^2}=\dfrac{1}{SI^2-SO^2}+\dfrac{1}{OS^2}\Rightarrow SA=3\sqrt{2}$

Diện tích tam giác đều SAB là: $S_{ABC}=\dfrac{SA^2.\sqrt{3}}{4}=\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

Câu 45: Cho hai hàm số $f(x), g(x)$ có đạo hàm trên tập số thực $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $\begin{cases}\ln\left[4f(x)-4x^2+12x+1\right]+f(x)-x^2+3x=0\\ g(x)=x^3-x^2+f(x)+\log m\end{cases}, \forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình: $g(3.g(x))+8g(x)=3x$ có 3 nghiệm phân biệt?

A. 24090 . **B.** 23871 . **C.** 24310 . **D.** 24531 .

Lời giải

Chọn C

Viết lại giả thiết thứ nhất: $\ln\left\{4\left[f(x)-x^2+3x\right]+1\right\}+f(x)-x^2+3x=0$

Nếu $f(x)-x^2+3x>0$ thì vế trái dương nên không thỏa mãn

Nếu $f(x)-x^2+3x<0$ thì vế trái âm nên không thỏa mãn

Nếu $f(x)-x^2+3x=0$ thì vế trái bằng không nên thỏa mãn

Vậy từ giả thiết thứ nhất ta tìm được $f(x)=x^2-3x.$

Với $f(x)=x^2-3x\Rightarrow g(x)+3x=x^3+\log m.$

Xét hàm số $y=x^3+\log m\Rightarrow y'=3x^2\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}.$ Hay hàm số $y=g(x)+3x$ đồng biến trên tập số thực. Ta có:

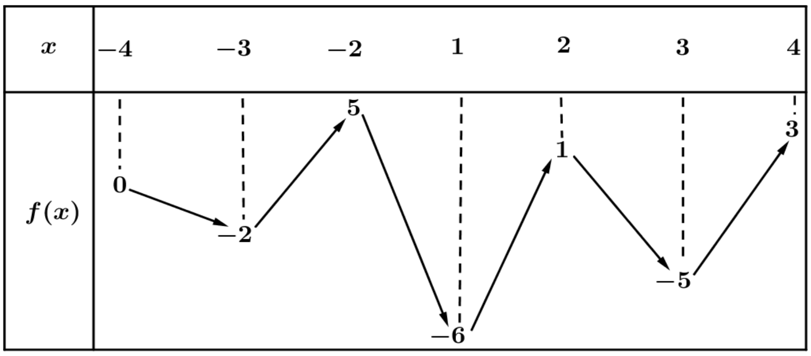
$g(3g(x))+8g(x)=3x\Leftrightarrow g\left(3g(x)\right)+3.3g(x)=g(x)+3x\Leftrightarrow 3g(x)=x\Leftrightarrow 3\left(x^3-3x+\log m\right)=x.$

$\Leftrightarrow 3x^3-10x=-3\log m,$ xét hàm $h(x)=3x^3-10x,$ để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì điều kiện cần và đủ là: $h_{CT}<-3\log m<h_{CĐ}\Leftrightarrow 1\le m\le 220,$ vì $m\in N^*.$

Ta có $1+2+3+...+220=24310.$

Vậy tổng các giá trị của tham số cần tìm là $24310.$

Câu 46: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới



Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x)=\left|f\left(x^3+2x\right)+f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8 ?

A. 10. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 7 .

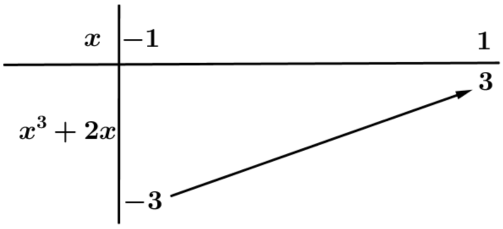
Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^3 + 2x \Rightarrow t' = 3x^2 + 2 > 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Hàm số $t = x^3 + 2x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó



$x \in [-1;1] \Rightarrow t \in [-3;3]$

$f\left(x^3 + 2x\right) = f(t)$ với $t \in [-3;3]$.

Ta có $\max\limits_{t\in[-3;3]}[f(t) + f(m)] = 5 + f(m)$; $\min\limits_{t\in[-3;3]}[f(t) + f(m)] = -6 + f(m)$

Nên $\max\limits_{x\in[-1;1]} g(x) = \max\limits_{t\in[-3;3]} \left|f(t) + f(m)\right| = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5 + f(m) = 8 \\ -6 + f(m) \geq -8 \end{cases} \\ \begin{cases} 5 + f(m) \leq 8 \\ -6 + f(m) = -8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(m) = 3 \\ f(m) = -2 \end{array}\right.$

Dựa vào bảng biến thiên với $m \in [-4;4]$ ta có:

Với $f(m) = 3$ phương trình có 3 nghiệm.

Với $f(m) = -2$ phương trình có 5 nghiệm.

Vậy có tất cả 8 giá trị của m thoả mãn.

Câu 47: Cho hệ phương trình $\begin{cases} 2^{x^2} - 4^{y+1} = 2y + 2 - x^2 \\ 4x^3 + 2(2y+2) = \sqrt{\left(x^4+1\right)\left[x^4 + 16(2y+2) + 8x + 1\right]} \end{cases}$

Biết hệ có một nghiệm $(x_0; y_0), x_0 > 0$, với $x_0 = \dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{-b + c\sqrt{2}}}{2}$ trong đó a, b, c là các số nguyên dương. Khi đó giá trị của $N = b + c - a$ bằng

A. 4. **B**. 2. **C**. 6. **D**. 8.

Lời giải

Chọn A

$2^{x^2} - 4^{y+1} = 2y + 2 - x^2 \Leftrightarrow 2^{x^2} + x^2 = 2^{2y+2} + (2y+2) \Leftrightarrow x^2 = 2y + 2$.

Thế $x^2 = 2y + 2$ vào phương trình còn lại ta được phương trình:

$x^2(4x+1) + x^2 = \sqrt{x^4+1}.\sqrt{x^4 + (4x+1)^2}$ (1).

Đặt $\begin{cases} \vec{u} = \left(x^2;1\right) \\ \vec{v} = \left(4x+1;x^2\right) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = x^2(4x+1) + x^2; \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right| = \sqrt{x^4+1}.\sqrt{x^4 + (4x+1)^2}$.

Mà ta luôn có: $\vec{u}.\vec{v} \leq \left|\vec{u}\right|\left|\vec{v}\right| \Rightarrow x^2(4x+1) + x^2 \leq \sqrt{x^4+1}.\sqrt{x^4 + (4x+1)^2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\vec{u}$ và $\vec{v}$ cùng hướng hay:

$$\frac{x^2}{4x+1}=\frac{1}{x^2}\Rightarrow x^4-4x-1=0\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^2=2\left(x+1\right)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}=0\left(VN\right)\\x^2-\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}=0\end{array}\right.$$

Từ đây ta tìm được nghiệm dương là $x=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{-2+4\sqrt{2}}}{2}\Rightarrow a=b=2;c=4.$

Vậy $N=c+b-a=4.$

Câu 48: Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\frac{1}{2}\log_{2024}a=\log_{2024}\frac{1}{b}$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4a+b^2-3\log_3\left(4a+b^2\right)$ được viết dưới dạng $x-y\log_3 z$, với x,y,z là các số nguyên dương lớn hơn 2. Khi đó, tổng $(x+2y+z)^2$ có giá trị bằng

A. 225. **B.** 144. **C.** 196. **D.** 121.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\frac{1}{2}\log_{2024}a=\log_{2024}\frac{1}{b}\Leftrightarrow\log_{2024}a=2\log_{2024}\frac{1}{b}\Leftrightarrow\log_{2024}a=\log_{2024}\frac{1}{b^2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{b^2}$.

Đặt $t=4\text{a}+b^2$. Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $t=4a+b^2=\frac{4}{b^2}+b^2\geq 2\sqrt{\frac{4}{b^2}.b^2}=4$.

Đẳng thức xảy ra khi $b=\sqrt{2}$ và $a=\frac{1}{2}$.

Khi đó: $P=4a+b^2-3\log_3\left(4a+b^2\right)=t-3\log_3 t$, với $t\geq 4$.

Xét hàm số: $f\left(t\right)=t-3\log_3 t$ liên tục trên nửa khoảng $\left[4;+\infty\right)$.

Có $f'\left(t\right)=1-\frac{3}{t\ln 3}=\frac{t\ln 3-3}{t\ln 3}>0$,$\forall t>4$

Suy ra hàm số $f\left(t\right)$ đồng biến trên $\left[4;+\infty\right)$.

$\Rightarrow P=f\left(t\right)\geq f\left(4\right)=4-3\log_3 4$. Suy ra: $P_{\min}=4-3\log_3 4$ khi $a=\frac{1}{2}$ và $b=\sqrt{2}$.

Vậy $x=4;y=3;z=4\Rightarrow(x+2y+z)^2=196$.

Câu 49: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm trên tập số thực $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f'\left(x\right)\left[3f^2\left(x\right)+1\right]=9x^8+21x^6+15x^4+6x^2+1,\forall x\in\mathbb{R},f\left(0\right)=0.$ Tính

$$\int_{-1}^{1}\left[\left(\frac{f\left(x\right)}{x^4+1}\right)^{2023}+\left(e^x+e^{-x}\right)f\left(x\right)+\frac{f^2\left(x\right)}{e^x+1}\right]dx.$$

A. $\frac{92}{105}$. **B.** $\frac{73}{105}$. **C.** $\frac{77}{105}$. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'\left(x\right)\left[3f^2\left(x\right)+1\right]=9x^8+21x^6+15x^4+6x^2+1$, lấy nguyên hàm hai vế kết hợp với điều kiện $f\left(0\right)=0$ ta được $f^3\left(x\right)+f\left(x\right)=\left(x^3+x\right)^3+\left(x^3+x\right)\Rightarrow f\left(x\right)=x^3+x.$

Ta chứng minh được nếu $f(x)$ là hàm số lẻ thì $\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ và nếu $f(x)$ là hàm số chẵn thì $\int\limits_{-a}^{a} \frac{f(x)}{e^x+1}dx = \int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$

Với $f(x) = x^3 + x$ suy ra các hàm số $y = \left(\frac{f(x)}{x^4+1}\right)^{2023}$; $y = \left(e^x + e^{-x}\right)f(x)$ là các hàm số lẻ còn hàm số $y = f^2(x)$ là hàm số chẵn. Khi đó:

$$\int\limits_{-1}^{1}\left[\left(\frac{f(x)}{x^4+1}\right)^{2023} + \left(e^x+e^{-x}\right)f(x) + \frac{f^2(x)}{e^x+1}\right]dx$$

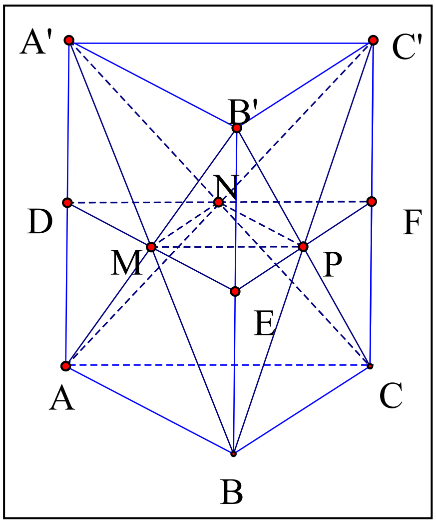
$$= \int\limits_{-1}^{1}\left(\frac{f(x)}{x^4+1}\right)^{2023}dx + \int\limits_{-1}^{1}\left(e^x+e^{-x}\right)f(x)dx + \int\limits_{-1}^{1}\frac{f^2(x)}{e^x+1}dx = \int\limits_{-1}^{1}\frac{f^2(x)}{e^x+1}dx = \int\limits_{0}^{1}\left(x^3+x\right)^2dx = \frac{92}{105}.$$

Câu 50: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng 6 và đáy là tam giác đều cạnh bằng 4. Gọi M, N, P lần lượt là tâm các mặt bên $ABB'A'$, $ACC'A'$, $BCC'B'$. Thể tích khối đa diện lồi có các đỉnh là các điểm A, B, C, M, N, P bằng

A. $9\sqrt{3}$. **B.** $10\sqrt{3}$. **C.** $7\sqrt{3}$. **D.** $12\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi DEF là thiết diện của lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Dễ chứng minh được $(DEF)//(ABC)$ và D, E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AA', BB', CC' suy ra $V_{ABC.DEF} = \frac{1}{2}V_{ABC.A'B'C'} = 12\sqrt{3}$.

Ta có $V_{ABCPNM} = V_{ABC.DEF} - V_{ADMN} - V_{BMPE} - V_{CPMF}$.

Mặt khác $V_{ADMN} = V_{BMPE} = V_{CPMF} = \frac{1}{12}V_{ABC.DEF} \Rightarrow V_{ABCPNM} = \frac{3}{4}V_{ABC.DEF} = 9\sqrt{3}$.

-------- Hết ------