

Bài 1. (2,0 điểm) Cho hai biểu thức $P = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2}$; $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 9$.

2) Rút gọn biểu thức $A = \frac{Q}{P}$.

3) Tìm x nguyên lớn nhất để $A < \frac{3}{4}$.

Bài 2. (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{3}{x+1} + \frac{1}{y-2} = 4 \\ \frac{2}{x+1} + \frac{3}{y-2} = 5 \end{cases}$$

2) Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2mx - m^2 + m + 1$

a) Với $m = 3$, xác định tọa độ giao điểm của (d) và (P).

b) Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 4$.

Bài 3. (1,5 điểm). Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình, hệ phương trình. Một công nhân được giao khoán sản xuất 120 sản phẩm trong thời gian nhất định. Trên thực tế, nhờ hợp lí hóa một số thao tác nên mỗi giờ người đó làm thêm được 3 sản phẩm nữa. Nhờ đó người công nhân hoàn thành công việc sớm hơn 2 giờ. Hỏi mỗi giờ người đó dự định làm bao nhiêu sản phẩm?

Bài 4. (3,5 điểm). Cho đường tròn (O ; R) và một đường thẳng d cắt (O) tại C, D. Lấy điểm M bất kỳ trên d sao cho $MC > MD$ và điểm M nằm ngoài đường tròn (O). Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O); A, B là các tiếp điểm. Gọi H là trung điểm CD. Chứng minh:

a) Năm điểm A, B, M, O, H cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $MA^2 = MC.MD$ và HM là tia phân giác của \widehat{AHB} .

c) Vẽ $DK // AM$ ($K \in AB$). Chứng minh $HK // AC$.

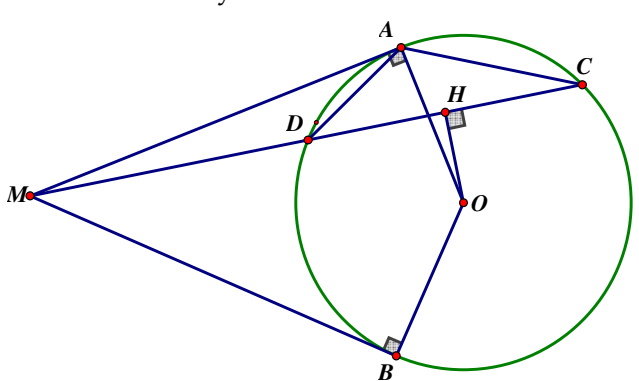
Bài 5. (0,5 điểm). Cho x, y là những số thực thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$, tìm giá trị lớn nhất của

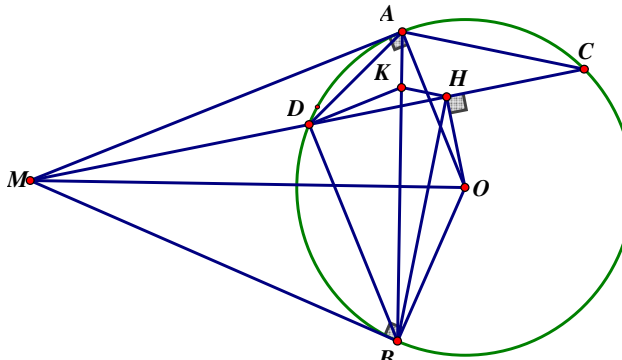
$$\text{biểu thức } P = \frac{x}{y + \sqrt{2}}.$$

-----Hết-----

ĐÁP ÁN - HƯỚNG DẪN CHẤM

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
I	1	Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 9$.	0,5
		Với $x = 9$ (tmđk), ta có $P = \frac{9 + \sqrt{9} + 1}{\sqrt{9} - 2} = 13$	0,5
	2	Rút gọn biểu thức Q.	1,0
		$Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x}} = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{x + \sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x} + 2}{x + \sqrt{x}}$	0,25
		$Q = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2}$.	0,50
		$A = \frac{Q}{P} = \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 2} : \frac{x + \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2}$.	0,25
	3	Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A.	0,50
	Ta có: $A < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} + 2} < \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4(\sqrt{x} - 2) < 3(\sqrt{x} + 2)$ (do $x \geq 0$, $\sqrt{x} \geq 0$, $\sqrt{x} + 2 > 0$). Suy ra $\sqrt{x} < 14 \Rightarrow x < 196$.	0,25	
	Từ đó tìm được $x = 195$ (tmđk).	0,25	
II	1	Giải hệ phương trình	1,00
		Điều kiện: $x \neq -1$; $y \neq 2$.	
		Đặt $a = \frac{1}{x+1}$; $b = \frac{1}{y-2}$, hệ trở thành $\begin{cases} 3a + b = 4 \\ 2a + 3b = 5 \end{cases}$	0,25
		Giải hệ tìm được $a = 1$; $b = 1$.	0,25
		$a = 1 \Rightarrow \frac{1}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (tmđk).	0,25
		$b = 1 \Rightarrow \frac{1}{y-2} = 1 \Leftrightarrow y = 3$ (tmđk).	0,25
		Vậy hệ có nghiệm $x = 0$, $y = 3$.	
2a	Với $m = 3$, xác định tọa độ giao điểm của (d) và (P).	0,75	
	Với $m = 3$, (d): $y = 6x - 5$. Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $x^2 = 6x - 5$ $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$.	0,50	
	Với $x = 1 \Rightarrow y = 1$; Với $x = 5 \Rightarrow y = 25$. Vậy giao điểm của (d) và (P) là $(1; 1)$ và $(5; 25)$.	0,25	
2b	Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1 - x_2 = 4$.	0,75	
	Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $x^2 = 2mx - m^2 + m + 1$	0,25	

	$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - m - 1 = 0$ (1) Đề (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt \Leftrightarrow (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.	
	Theo Viet, ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 - m - 1 \end{cases}$ Theo bài ra: $ x_1 - x_2 = 4 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 16$ Suy ra $4m^2 - 4(m^2 - m - 1) = 16$	0,25
	Từ đó tìm được $m = 3$ (tmđk). Vậy $m = 3$.	0,25
III	Hỏi mỗi giờ người đó dự định làm bao nhiêu sản phẩm?	1,50
	Gọi số sản phẩm người công nhân dự định làm trong mỗi giờ là x . Điều kiện: $x > 0$.	0,25
	Thời gian người đó dự định làm là $\frac{120}{x}$ (giờ)	0,25
	Thực tế, mỗi giờ người đó làm được $x + 3$ (sản phẩm) Thời gian thực tế đã làm 120 sản phẩm là $\frac{120}{x + 3}$ (giờ)	0,25
	Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{120}{x} - \frac{120}{x + 3} = 2$	0,25
	Giải phương trình, ta tìm được $x_1 = 12$ (tmđk); $x_2 = -15$ (không tmđk) Kết luận: Vậy người công nhân đó dự định mỗi giờ làm 12 sản phẩm.	0,5
IV	1 Chứng minh 5 điểm A, B, M, O, H cùng thuộc một đường tròn.	1,50
	Vẽ hình đến hết ý a	
		0,25
	Chỉ ra ΔMAO vuông tại A, từ đó M, A, O thuộc đường tròn đường kính MO	0,5
	Chỉ ra ΔMBO vuông tại B, từ đó B thuộc đường tròn đường kính MO	0,25
	Chỉ ra ΔMHO vuông tại H, từ đó H thuộc đường tròn đường kính MO	0,25
	Vậy 5 điểm M, A, H, O, B cùng thuộc một đường tròn	0,25
2 Chứng minh $MA^2 = MC \cdot MD$ và HM là tia phân giác của \widehat{AHB}.	1,50	
Chứng minh $\Delta MAC \sim \Delta MDA$ (g.g)	0,5	
Suy ra $\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC \cdot MD$	0,5	
Xét đường tròn đi qua 5 điểm M, A, H, O, B có: AHM là góc nội tiếp chắn cung AM (1)	0,25	

	BHM là góc nội tiếp chắn cung MB (2) Mặt khác MA, MB là 2 tiếp tuyến cắt nhau của (O) nên MA = MB (3)	
	Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{AHM} = \widehat{BHM}$, hay HM là tia phân giác của \widehat{AHB} .	0,25
3	Chứng minh HK// AC	0,5
		
	Ta có $\widehat{AMH} = \widehat{KBH}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AH của đường tròn đi qua 5 điểm M, A, H, O, B). Mà $\widehat{AMH} = \widehat{HDK}$ (đồng vị) nên $\widehat{KBH} = \widehat{KDH}$. Từ đó tứ giác KHDB nội tiếp.	0,25
	Suy ra $\widehat{KHD} = \widehat{KBD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung DK của đường tròn ngoại tiếp tứ giác KHDB). Mà $\widehat{ACD} = \widehat{KBD}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AD của đường tròn (O)). Do đó $\widehat{KHD} = \widehat{ACD}$, mà 2 góc này ở vị trí đồng vị nên AC // KH.	0,25
	Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x}{y + \sqrt{2}}$.	0,50
V	Từ điều kiện $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y \leq 1 \Rightarrow y + \sqrt{2} > 0$ Ta có: $P = \frac{x}{y + \sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{2}P = x - Py \Rightarrow 2P^2 = (x - Py)^2$ $2P^2 = (x - Py)^2 \leq (1 + P^2)(x^2 + y^2) = 1 + P^2 \Rightarrow P^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq 1.$	0,25
	$P = 1$ khi $x = \frac{1}{\sqrt{2}}; y = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Vậy giá trị lớn nhất của P là bằng 1	0,25