SỞ GD & ĐT THANH HÓA
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI KHẢO SÁT CÁC MÔN THI VÀO LỚP 10
THPT CHUYÊN LAM SƠN
Năm học: 2024 – 2025
Môn thi: **TOÁN**
(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán)
Ngày thi: 07/4/2024
*Thời gian làm bài:**150** phút (không kể thời gian phát đề)*

Câu 1. a) Cho x, y là các số hữu tỉ dương thỏa mãn $x^2+y^2+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2=2$, chứng minh $\sqrt{1+xy}$ là số hữu tỉ.

b) Cho biểu thức $P(x)=\sqrt{x^8-12x+12}+3x$. Gọi x_0 là một nghiệm của phương trình $x^2+x-1=0$. Tính giá trị $P(x_0)$..

Câu 2. a) Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-1}=x^2-x+3.$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3(3+2y)=8 \\ xy(y^2+3y+3)=4. \end{cases}$

Câu 3. a) Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$.

b) Cho n là số nguyên dương và d là ước dương của $2n^2$, chứng minh n^2+d không phải là số chính phương.

Câu 4. Tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH $(H \in BC)$. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm H trên các cạnh AB, AC. Đường thẳng KL cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q (P và B cùng phía đối với AC).

a) Chứng minh tứ giác $BKLC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PHQ.

c) AH cắt lại đường tròn (O) tại T $(T \neq A)$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của H lên KL; AD cắt đường tròn (O) tại M $(M \neq A)$. Chứng minh $\widehat{HMT}=90^0$.

Câu 5. Chứng minh rằng từ 6 số vô tỉ tùy ý ta có thể chọn được 3 số a, b, c sao cho cả 3 số $a+b, b+c, c+a$ đều là số vô tỉ. Bài toán còn đúng không nếu ban đầu là 4 số?

……………………………. **Hết** ……………………………
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:.........................
Chữ kí của giám thị số 1 : ………………………………………….Chữ kí của giám thị số 2:………………

SỞ GD & ĐT THANH HÓA
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01trang)

KỲ THI KHẢO SÁT CÁC MÔN THI VÀO LỚP 10
THPT CHUYÊN LAM SƠN
Năm học: 2024 - 2025
Môn thi: Toán (chuyên Toán)
Ngày thi:
Thời gian làm bài:150 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN ***(Chuyên Toán)***

Câu 1. a) Ta có: $x^2+y^2+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2=2 \Leftrightarrow (x+y)^2-2(xy+1)+\left(\frac{xy+1}{x+y}\right)^2=0$ **(0,25đ)**

$\Leftrightarrow \left(x+y-\frac{xy+1}{x+y}\right)^2=0 \Leftrightarrow x+y-\frac{xy+1}{x+y}=0 \Leftrightarrow x+y=\frac{xy+1}{x+y}$ **(0,25đ)**

$\Leftrightarrow xy+1=(x+y)^2 \Leftrightarrow \sqrt{1+xy}=x+y$ **(0,5đ)**

b) Ta có $x_0^2+x_0-1=0 \Rightarrow x_0^2=1-x_0 \Rightarrow x_0^4=x_0^2-2x_0+1=(1-x_0)-2x_0+1=2-3x_0$.

$\Rightarrow x_0^8=9x_0^2-12x_0+4$ **(0,5đ)**

Do đó $P(x_0)=\sqrt{9x_0^2-24x_0+16}+3x_0=|4-3x_0|+3x_0,$ **(0,25đ)**

mà $4-3x_0=3(1-x_0)+1=3x_0^2+1>0.$ Vậy $P(x_0)=4-3x_0+3x_0=4.$ **(0,5đ)**

Câu 2. a) ĐK: $x\ge 2/3$. Ta có:

$\sqrt{3\text{x-2}}+\sqrt{5\text{x-1}}=x^2-x+3 \Leftrightarrow \left(x-\sqrt{3\text{x-2}}\right)+\left(x+1-\sqrt{5\text{x-1}}\right)+(x^2-3x+2)=0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-3\text{x+2}}{\sqrt{3\text{x-2}}+x}+\frac{(x+1)^2-(5\text{x-1})}{\sqrt{5\text{x-1}}+(x+1)}+(x^2-3x+2)=0$ $(0,5d)$

$\Leftrightarrow (x^2-3x+2)\left[\frac{1}{\sqrt{3\text{x-2}}+x}+\frac{1}{\sqrt{5\text{x-1}}+(x+1)}+1\right]=0$

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{3\text{x}+1}+(x+1)}+\frac{1}{\sqrt{5\text{x}+4}+(x+2)}+1>0, \forall x\ge 2/3$

Suy ra: $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1, x=2\ (tm)$

KL: $x=1, x=2.$

(0,5đ)

b) Từ hệ suy ra $x \neq 0$. Hê $\Leftrightarrow \begin{cases} 3+2y=\dfrac{8}{x^3} \\ y^3+3y^2+3y=\dfrac{4}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+2(y+1)=\dfrac{8}{x^3} \\ (y+1)^3=\dfrac{4}{x}+1 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u=\dfrac{2}{x} \\ v=y+1 \end{cases}$ ta được hệ phương trình: $\begin{cases} u^3=2v+1 \ (1) \\ v^3=2u+1 \ (2) \end{cases}$ **(0,5đ)**

$\Rightarrow u^3-v^3=2(v-u) \Leftrightarrow (u-v)(u^2+uv+v^2+2)=0$ Vì $u^2+uv+v^2+2>0$, nên $u=v$

Từ (1) suy ra : $u^3-2u-1=0 \Rightarrow \begin{cases} u=v=-1 \\ u=v=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

Với $u=v=-1 \Rightarrow x=y=-2$

Với $u=v=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{5}-1 \\ y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$

Với $u=v=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=-\sqrt{5}-1 \\ y=\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2} \end{cases}$ **(0,5đ)**

Câu 3. a) Từ giả thiết suy ra:

$7(x+2y) \vdots 5 \Rightarrow (x+2y) \vdots 5 \Rightarrow x+2y=5m \Rightarrow x=5m-2y \quad (m \in \mathbb{N}^*)$

Thay vào phương trình ta có:

$(5m-2y)^2+(5m-2y)y+y^2-7m=0 \Leftrightarrow 3y^2-15my+25m^2-7m=0 \ (0,25d)$

Phương trình (ẩn y)có nghiệm nên

$\Delta=225m^2-12(25m^2-7m)\geq 0 \Rightarrow 75m^2-84m\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq m\leq \dfrac{84}{75}$ **(0,25đ)**

Do m là số nguyên nên $m=0$ (loại), hoặc $m=1$

Với $m=1$, ta được $\begin{cases} x=5-2y \\ 3y^2-15y+18=0 \end{cases} \begin{cases} x=5-2y \\ (y-2)(y-3)=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(1,2)$ **(0,5đ)**

Nhận xét. Cũng có thể giải câu 3a) theo cách sau:

Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$.

Vì $x, y \in \mathbb{N}^*$, ta có: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y) \Leftrightarrow 5(4x^2+4xy+4y^2)=28(x+2y)$

$\Leftrightarrow 15x^2+5(x+2y)^2=28(x+2y) \Rightarrow 5(x+2y)^2<28(x+2y) \Rightarrow x+2y<\dfrac{28}{5}$

$\Rightarrow 3 \le x + 2y \le 5$

Từ phương trình suy ra: $7(x+2y) \vdots 5 \Rightarrow (x+2y) \vdots 5$ (vì $(5;7)=1$)

Dẫn đến $x + 2y = 5 \Rightarrow \begin{cases} x+2y=5 \\ x^2+xy+y^2=7 \end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(1,2)$

Vật phương trình có nghiệm nguyên dương: $(x,y)=(1,2)$

b) Giải sử n^2+d là số chính phương, ta có $\begin{cases} n^2+d=m^2 \\ 2n^2=d.k \end{cases} (m,k \in \mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow \begin{cases} n^2+d=m^2 \\ \dfrac{2n^2}{k}=d \end{cases} \Rightarrow n^2+\dfrac{2n^2}{k}=m^2 \Rightarrow n^2k^2+2n^2k=m^2k^2$ **(0,5đ)**

$\Rightarrow k^2+2k=\left(\dfrac{mk}{n}\right)^2$ vì $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \left(\dfrac{mk}{n}\right)^2 \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \dfrac{mk}{n} \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \left(\dfrac{mk}{n}\right)^2$ là số chính phương $\Rightarrow k^2+2k$ là số chính phương. Nhưng ta có $k^2 < k^2+2k < (k+1)^2$ nên vô lý, dẫn đến giả sử sai. Vậy n^2+d không chính phương. **(0,5đ)**

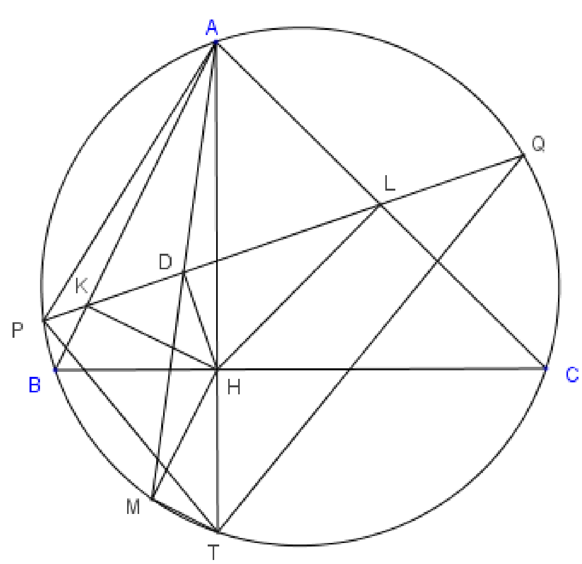
Câu 4. a) (Có nhiều cách để chứng minh tứ giá BKLC nội tiếp)

Ta có tam giác AHB vuông tại H và có đường cao là HK, nên $AH^2 = AK.AB$ (1) (hệ thức trong tam giác vuông).

Tương tự ta có $AH^2 = AL.AC$ (2).

Từ(1) và (2) ta được $AK.AB = AL.AC \Rightarrow \dfrac{AK}{AC}=\dfrac{AL}{AB}$ (3) **(0,5đ)**

Xét tam giác AKL và ACB có $\widehat{KAL}$ chung và thỏa mãn (3), suy ra $\Delta AKL \sim \Delta ACB (c-g-c) \Rightarrow \widehat{AKL}=\widehat{ACB}$, suy ra tứ giác BKLC nội tiếp. **(0,5đ)**



b) Từ $\widehat{ACB}=\widehat{AKL}\Rightarrow \frac{1}{2}sd\overset{\frown}{APB}=\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AQ}+sd\overset{\frown}{PB}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AP}+sd\overset{\frown}{PB}\right)=\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{AQ}+sd\overset{\frown}{PB}\right)\Rightarrow sd\overset{\frown}{AP}=sd\overset{\frown}{AQ}\Rightarrow A$ là trung điểm cung PQ,

suy ra $AP=AQ$ (4) **(0,25đ)**

Xét tam giác APK và tam giác ABP có $\widehat{PAB}$ chung và $\widehat{APK}=\widehat{ABP}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau), suy ra $\Delta APK\sim\Delta ABP(g-g)\Rightarrow \frac{AP}{AB}=\frac{AK}{AP}$

$\Rightarrow AP^2=AK.AB$ (5) Từ (1), (5) và (4) suy ra $AP=AH=AQ,$ **(0,25đ)**

suy ra A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PQH, mà $AH\perp BC,$ nên BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PHQ. **(0,5đ)**

c) Xét hai tam giác APD và AMP có $\widehat{PAM}$ chung và

$\widehat{APD}=\widehat{APQ}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AQ}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{AP}=\widehat{AMP},$ dó đó

$\Delta APD\sim\Delta AMP(g-g)\Rightarrow \frac{AP}{AM}=\frac{AD}{AP}\Rightarrow AP^2=AD.AM,$ **(0,25đ)**

do đó $AH^2=AP^2=AD.AM\Rightarrow \frac{AH}{AD}=\frac{AM}{AH}$

Xét hai tam giác ΔAHM và ΔADH có $\widehat{HAM}$ chung và $\frac{AH}{AD}=\frac{AM}{AH}$, do đó

$\Delta AHM\sim\Delta ADH(c-g-c)\Rightarrow \widehat{AMH}=\widehat{AHD}\Rightarrow AH$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DHM, **(0,5đ)**

Suy ra $\widehat{THM}=\widehat{HDM}=90^0-\widehat{MDP}=90^0-\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{PM}+sd\overset{\frown}{AQ}\right)=90^0-\frac{1}{2}\left(sd\overset{\frown}{PM}+sd\overset{\frown}{AP}\right)$

$=90^0-\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{APM}=90^0-\widehat{ATM}=90^0-\widehat{HTM}\Rightarrow \widehat{THM}+\widehat{HTM}=90^0\Rightarrow \widehat{HMT}=90^0.$ **(0,25đ)**

Câu 5. Xét một số A bất kỳ trong 6 số đó, xét 5 tổng của A với 5 số còn lại. Ta thấy trong 5 tổng này ít nhất có 3 tổng cùng là là <u>số vô tỉ hoặc cùng là hữu tỉ</u>.

*) Nếu có ít nhất 3 tổng là vô tỷ chẳng hạn $A+B_1;A+B_2;A+B_3$ là vô tỉ, xét 3 số $B_1+B_2;B_1+B_3;B_3+B_2$ nếu có 1 số vô tỷ chẳng hạn B_1+B_2 thì bộ 3 số (A,B_1,B_2) thỏa mãn yêu cầu bài toán. Nếu không có số nào vô tỉ thì cả 3 số đó hữu tỉ, điều này dẫn đến $(B_1+B_2)+(B_1+B_3)-(B_3+B_2)=2B_1$ hữu tỉ , vô lý. **(0,5đ)**

Trường hợp nếu có ít nhất 3 tổng là hữu tỉ chẳng hạn $A+B_1;A+B_2;A+B_3$ hữu tỉ

Thì ta cũng lập luận như trên đối với bộ (B_1,B_2,B_3).

Vậy bài toán đã được chứng minh. **(0,25đ)**

Bài toán không còn đúng nếu ban đều là 4 số, chẳng hạn bộ 4 số sau:
$\{a, 1+a, 1-a, -a\}$ với a vô tỉ không thể chọn được ra 3 số có tổng đôi một vô tỉ. nhau

(0,25đ)

……………………………………….. **Hết** ………………………………………

SỞ GD & ĐT THANH HÓA
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI KHẢO SÁT CÁC MÔN THI VÀO LỚP 10
THPT CHUYÊN LAM SƠN
Năm học: 2024 - 2025
Môn thi: **TOÁN**
(Dành cho thí sinh thi vào lớp chuyên Tin học)
Ngày thi: 07/4/2024
Thời gian làm bài: **150** *phút (không kể thời gian phát đề)*

Câu 1. a) Tính giá trị của biểu thức $P(x)=\dfrac{x^4-6x^3-2x^2+18x+23}{x^2-8x+15}$ tại $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$.

b) Cho x, y là các số hữu tỉ dương sao cho $\dfrac{x-2\sqrt{3}}{2-y\sqrt{3}}$ là số hữu tỉ. Tính xy.

Câu 2. a) Giải phương trình: $\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-1}=x^2-x+3$.

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases}4x^3=y^2+3\\4y^3=x^2+3\end{cases}$.

Câu 3. a) Cho các số thực x, y khác 0, sao cho $x+\dfrac{1}{y}$ và $y+\dfrac{1}{x}$ là những số nguyên, chứng minh rằng $x^3y^3+\dfrac{1}{x^3y^3}$ là số nguyên.

b) Giải phương trình nghiệm nguyên dương $x^6+3x^3+1=y^4$.

Câu 4. Tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH $(H\in BC)$. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm H trên các cạnh AB, AC. Đường thẳng KL cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q (P và B cùng phía đối với AC).

a) Chứng minh tứ giác $BKLC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh PQ vuông góc với AO.

c) AH cắt lại đường tròn (O) tại T $(T\neq A)$. Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PTQ.

Câu 5. Các số thực dương x, y thỏa mãn: $x^3+y^3=x-y$, chứng minh $x^2+y^2<1$.

……………………………………….. **Hết** ………………………………………
Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh:.. Số báo danh:..........................
Chữ kí của giám thị số 1 : ………………………….Chữ kí của giám thị số 2:……………

SỞ GD & ĐT THANH HÓA
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang)

KỲ THI KHẢO SÁT CÁC MÔN THI VÀO LỚP 10
THPT CHUYÊN LAM SƠN
Năm học: 2024 - 2025
Môn thi: **Toán** (cho chuyên Tin)
Ngày thi: 07/4/2024
Thời gian làm bài:150 phút (không kể thời gian phát đề)

ĐÁP ÁN

Câu 1. a) Ta có $x=\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{\left(4-\sqrt{3}\right)^2}=4-\sqrt{3}\Rightarrow 4-x=\sqrt{3}\Rightarrow x^2-8x+13=0.$ **(0,5đ)**

Do đó $x^4-6x^3-2x^2+18x+23=(x^2-8x+13)(x^2+2x+1)+10=10.$

Vậy $P\left(\sqrt{19-8\sqrt{3}}\right)=\dfrac{10}{2}=5.$ **(0,5đ)**

b) Ta có $\dfrac{x-2\sqrt{3}}{2-y\sqrt{3}}=\dfrac{\left(x-2\sqrt{3}\right)\left(2+y\sqrt{3}\right)}{4-3y^2}$ **(0,5đ)**

$=\dfrac{2x-3.2y+(xy-4)\sqrt{3}}{4-3y^2}$, là số hữu tỉ khi $xy=4.$ **(0,5đ)**

Cách khác: Đặt

$$\frac{x-2\sqrt{3}}{2-y\sqrt{3}}=\frac{a}{b}\left(a,b\in\mathbb{Q};a,b\neq 0)\right)\Rightarrow bx-2a=(2b-ay)\sqrt{3}\Rightarrow\begin{cases}2b-ay=0\\ bx-2a=0\end{cases}\Rightarrow xy=4.$$

Câu 2. a) ĐK: $x\geq 2/3$. Ta có:

$$\sqrt{3\text{x-2}}+\sqrt{5\text{x-1}}=x^2-x+3\Leftrightarrow\left(x-\sqrt{3\text{x-2}}\right)+\left(x+1-\sqrt{5\text{x-1}}\right)+(x^2-3x+2)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-3\text{x+2}}{\sqrt{3\text{x-2}}+x}+\frac{(x+1)^2-(5\text{x-1})}{\sqrt{5\text{x-1}}+(x+1)}+(x^2-3x+2)=0 \qquad (0,5d)$$

$$\Leftrightarrow(x^2-3x+2)\left[\frac{1}{\sqrt{3\text{x-2}}+x}+\frac{1}{\sqrt{5\text{x-1}}+(x+1)}+1\right]=0$$

Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{3\text{x}+1}+(x+1)}+\dfrac{1}{\sqrt{5\text{x}+4}+(x+2)}+1>0,\forall x\geq 2/3$

Suy ra: $x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1,\ x=2\ (tm)$

KL: $x=1,\ x=2.$

(0,5đ)

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}4x^3=y^2+3\ (1)\\ 4y^3=x^2+3\ (2).\end{cases}$

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2) vế theo vế, ta được:

$$(x-y)(4x^2+4y^2+4xy+x+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-y=0 \\ 4x^2+4y^2+4xy+x+y=0. \end{array}\right.$$ **(0,25đ)**

- Với $x-y=0 \Leftrightarrow x=y,$ thay vào phương trình (1) ta được $4x^3-x^2-3=0 \Leftrightarrow (x-1)(4x^2+3x+3)=0 \Leftrightarrow x=1,$ (vì pt $4x^2+3x+3=0,$ có $\Delta=-27<0,$ nên vô nghiệm)

Từ $x=1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow x=y=1$ là nghiệm. **(0,5đ)**

- Từ phương trình (1) và (2) suy ra các vế trái của (1) và (2) dương, suy ra $x>0, y>0.$

Do đó phương rình $4x^2+4y^2+4xy+x+y=0$ vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình đã cho có một nghệm $x=y=1.$ **(0,25đ)**

Câu 3. a) Từ giả thiết suy ra: $\left(x+\dfrac{1}{y}\right)\left(y+\dfrac{1}{x}\right)=xy+\dfrac{1}{xy}+2$ là số nguyên $\Rightarrow xy+\dfrac{1}{xy}$ là số nguyên. **(0,5đ)**

Từ đó ta có $x^3y^3+\dfrac{1}{x^3y^3}=(xy)^3+\left(\dfrac{1}{xy}\right)^3=\left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)^3-3xy.\dfrac{1}{xy}\left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)$

$=\left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)^3-3\left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)$ là số nguyên (đpcm) **(0,5đ)**

b) Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $x^6+3x^3+1=y^4$ (1)

Đặt $z=x^3,$ phương trình (1) trở thành $z^2+3z+1-y^4=0$ (2)

Phương trình (2) ẩn z có $\Delta=5+4y^4.$

Nếu phương trình (2) có nghiệm nguyên thì

$\Delta=5+4y^4=m^2\ (m\in\mathbb{N}^*) \Rightarrow (m-2y^2)(m+2y^2)=5$ **(0,25)**

$$\Rightarrow \begin{cases} m+2y^2=5 \\ m-2y^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=3 \\ y^2=1 \end{cases} \Rightarrow y=\pm 1.$$ **(0,5đ)**

Với $y=1 \Rightarrow x=0$ (loại)

Với $y=-1$ (loại).

Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên dương. **(0,25đ)**

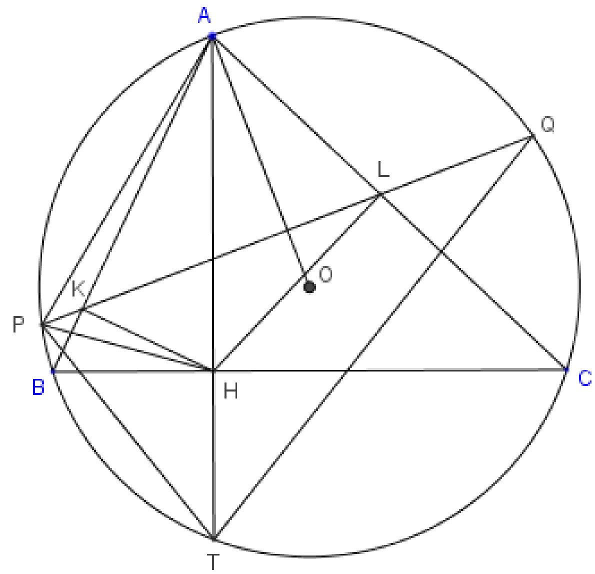
Cách khác: Vì $x>0,$ nên $(x^3+1)^2<x^6+3x^3+1=y^4<(x^3+2)^2=x^6+4x^3+4.$ (2) Mà $(x^3+1)^2$ và $(x^3+2)^2$ là hai số chính phương liên tiếp, nên (2) suy ra y^4 không chính phương (vô lý). Vây phương trinhg (1) vô nghiệm nguyên dương.

Câu 4. a) Ta có tam giác AHB vuông tại H và có đường cao là HK, nên $AH^2 = AK.AB$ (1) (hệ thức trong tam giác vuông).

Tương tự ta có $AH^2 = AL.AC$ (2).

Từ(1) và (2) ta được $AK.AB = AL.AC \Rightarrow \dfrac{AK}{AC} = \dfrac{AL}{AB}$ (3) **(0,5đ)**

Xét tam giác AKL và ACB có $\widehat{KAL}$ chung và thỏa mãn (3), suy ra $\Delta AKL \sim \Delta ACB \Rightarrow \widehat{AKL} = \widehat{ACB}$, suy ra tứ giác BKLC nội tiếp. **(0,5đ)**



b) (Có nhiều cách để chứng minh $PQ \perp AO$, sau đây chỉ nêu một cách)

Từ $\widehat{ACB} = \widehat{AKL} \Rightarrow \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{APB} = \dfrac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AQ} + sd\,\overset{\frown}{PB}\right)$ **(0,25đ)**

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AP} + sd\,\overset{\frown}{PB}\right) = \dfrac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AQ} + sd\,\overset{\frown}{PB}\right) \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AP} = sd\,\overset{\frown}{AQ} \Rightarrow A$ là trung điểm cung PQ, **(0,5đ)**

do đó $PQ \perp AO.$ **(0,25đ)**

c) Từ A là trung điểm cung PQ, suy ra $AP = AQ$ (4) và TA là phân giác $\widehat{PTQ}.$

Xét tam giác APK và tam giác ABP có $\widehat{PAB}$ chung và $\widehat{APK} = \widehat{ABP}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau), suy ra

$\Delta APK \sim \Delta ABP (g-g) \Rightarrow \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AK}{AP} \Rightarrow AP^2 = AK.AB$ (5) Từ (1), (5) và (4) suy ra

$AP = AH = AQ.$ **(0,5đ)**

Từ tam giác APH cân tại A, suy ra

$\widehat{APH} = \widehat{AHP} \Rightarrow \widehat{APQ} + \widehat{QPH} = \widehat{HPT} + \widehat{HTP} = \widehat{HPT} + \widehat{ATQ} = \widehat{HPT} + \widehat{APQ} \Rightarrow \widehat{QPH} = \widehat{HPT},$

suy ra PH là phân giác của $\widehat{TPQ}.$ **(0,25đ)**

Vậy H là giao điểm của hai đường phân giác trong trong tam giác TPQ, do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác TPQ. **(0,25đ)**

Câu 5. Do x, y dương nên $x - y = x^3 + y^3 > 0 \Rightarrow x > y$ **(0,25đ)**

Do x, y dương nên $x - y = x^3 + y^3 > x^3 - y^3$ **(0,25đ)**

$\Rightarrow x - y > x^3 - y^3 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 < 1$

Suy ra $x^2 + y^2 < 1$ (đpcm) **(0,5đ)**

……………………………………….. *Hết* ………………………………………