

Câu 1. Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} + \frac{\sqrt{x} + 2}{3 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x} + 2}{x - 5\sqrt{x} + 6}$ với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức A ;

b) Tính giá trị biểu thức A tại $x = 7 + 4\sqrt{3}$.

Câu 2. a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{5}{x-5} + \frac{6}{y-6} = 5 \\ \frac{10}{x-5} - \frac{9}{y-6} = -1 \end{cases}$$
.

b) Tìm m sao cho đường thẳng $(d): y = (m^2 + 2m)x + m^2 - m$ đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và hàm số bậc nhất $y = (m^2 + 2m)x + m^2 - m$ đồng biến trên \mathbb{R} .

Câu 3. Cho phương trình $x^2 - (4m - 1)x + 3m^2 - 2m = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình khi $m = 2$;

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - (x_1 + x_2) - \frac{2}{x_1 x_2} = -2.$$

Câu 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A và B . Kẻ tiếp tuyến chung DE của hai đường tròn với $D \in (O)$ và $E \in (O')$ sao cho B gần tiếp tuyến đó hơn so với A .

a) Chứng minh rằng $\widehat{DAB} = \widehat{BDE}$.

b) Đường thẳng DB cắt AE tại P , đường thẳng EB cắt AD tại Q . Chứng minh tứ giác $APBQ$ nội tiếp đường tròn.

c) Chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE .

Câu 5. Cho các số thực $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng: $x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq 4xyz - 4$.

Hết

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Chữ kí của giám thị số 1: Chữ kí của giám thị số 2:

ĐÁP ÁN

Câu 1. với $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$ ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{x-5\sqrt{x}+6}$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+2}{3-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \quad (0,25đ)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) + \sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} \quad (0,25đ)$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{1}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}+2}{x-4}. \quad (0,5đ)$$

Lưu ý: Học sinh có thể viết đáp số là $A = \frac{1}{\sqrt{x}-2}$.

a) $x = 7 + 4\sqrt{3} = (\sqrt{3} + 2)^2$ (0,5đ)

$$\Rightarrow \sqrt{x} - 2 = \sqrt{3} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (0,5đ)$$

Câu 2. a) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{5}{x-5} + \frac{6}{y-6} = 5 \\ \frac{10}{x-5} - \frac{9}{y-6} = -1. \end{cases}$ đặt $\begin{cases} a = \frac{1}{x-5} \\ b = \frac{1}{y-6}, \end{cases}$ hệ đã cho trở

$$\begin{cases} 5a + 6b = 5 \\ 10a - 9b = -1 \end{cases} \quad (0,5đ)$$

thành

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{13}{35} \\ b = \frac{11}{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x-5} = \frac{13}{35} \\ \frac{1}{y-6} = \frac{11}{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{100}{13} \\ y = \frac{87}{11}. \end{cases} \quad (0,5đ)$$

b) Tìm m sao cho hàm số $y = (m^2 + 2m)x + m^2 - m$ đồng biến và đường thẳng

$$(d): y = (m^2 + 2m)x + m^2 - m \text{ đi qua gốc tọa độ } O(0,0)$$

Hàm số đồng biến và đi qua gốc tọa độ khi và chỉ khi m thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} m^2 + 2m > 0 \\ 0 = (m^2 + 2m) \cdot 0 + m^2 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m > 0 \\ m(m-1) = 0 \end{cases} \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m > 0 \\ m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1. \quad (0,5đ)$$

Câu 3. Cho phương trình: $x^2 - (4m - 1)x + 3m^2 - 2m = 0$ (1)

a) Với $m = 2$, phương trình (1) trở thành $x^2 - 7x + 8 = 0$ (2) (0,25đ)

$$\text{Có } \Delta = 17 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{17}. \quad (0,25đ)$$

Vậy phương trình (2) có hai nghiệm $x_1 = \frac{7 - \sqrt{17}}{2}; x_2 = \frac{7 + \sqrt{17}}{2}$. (0,5đ)

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - (x_1 + x_2) - \frac{2}{x_1 x_2} = -2.$$

Điều kiện để phương trình (1) có hai nghiệm khác 0 là

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ 3m^2 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 1 \geq 0 \\ m(3m - 2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases}. \quad (0,25đ)$$

Lưu ý: Học sinh có thể chỉ cần ghi biểu thức điều kiện.

Theo định lí Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m - 1 \\ x_1 x_2 = 3m^2 - 2m \end{cases}$ Khi đó

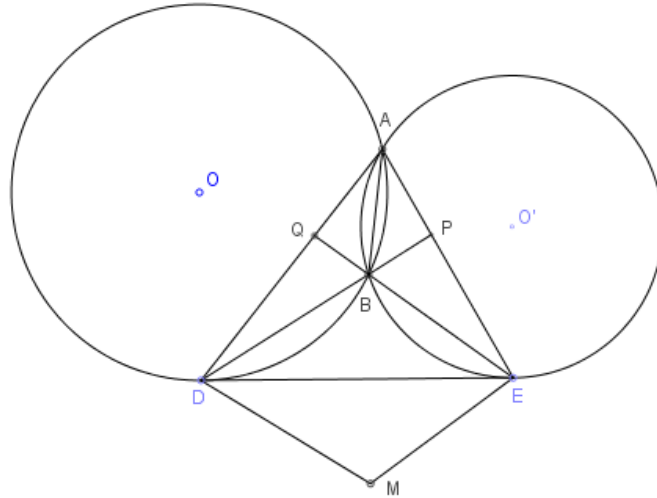
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - (x_1 + x_2) - \frac{2}{x_1 x_2} = -2 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} - (x_1 + x_2) - \frac{2}{x_1 x_2} = -2$$

$$x_1 + x_2 - (x_1 + x_2)x_1 x_2 - 2 = -2x_1 x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)(1 - x_1 x_2) - 2(1 - x_1 x_2) = 0 \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow (1 - x_1 x_2)(x_1 + x_2 - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-3m^2+2m)(4m-3)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4m-3=0 \\ 3m^2-2m-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{3}{4} \\ m=1 \\ m=-\frac{1}{3} \end{cases} \quad (t/m) \quad (0,25đ)$$

Câu 4. Giải.



a) Ta có $\widehat{DAB} = \frac{1}{2}sd\widehat{DB}$ (góc nội tiếp), và $\widehat{BDE} = \frac{1}{2}sd\widehat{DB}$ (góc giữa tia tiếp tuyến và dây cung). Do đó $\widehat{DAB} = \widehat{BDE}$. (1,0đ)

b) Chứng minh tương tự câu a) ta có $\widehat{BAE} = \widehat{BED}$. (0,25đ)

Suy ra $\widehat{DAE} = \widehat{DAB} + \widehat{BAE} = \widehat{BDE} + \widehat{BED}$. (0,25đ)

Do đó tứ giác APBQ có $\widehat{QAP} + \widehat{QBP} = \widehat{DAE} + \widehat{QBP} = (\widehat{BDE} + \widehat{BED}) + \widehat{DBE} = 180^\circ$,

Nên tứ giác APBQ nội tiếp đường tròn. (0,5đ)

c) Gọi M là điểm đối xứng với điểm B qua DE, suy ra $\triangle BDE = \triangle MDE(c-c-c)$, do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle BDE$ bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle MDE$ và $\widehat{DBE} = \widehat{DME}$. (0,5đ)

Do đó $\widehat{DAE} + \widehat{DME} = 180^\circ \Rightarrow ADME$ nội tiếp, do đó bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DME bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE. (0,5đ)

Lưu ý: Có thể giải câu c) bằng cách gọi M là điểm đối xứng với B qua trung điểm DE và giải tương tự như trên, hoặc trình bày theo cách sau.

Đặt $\widehat{DBE} = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Thì cung DBE của đường tròn ngoại tiếp tam $\triangle DBE$ là cung chứa góc α , dựng trên đoạn DE.

Từ câu b) suy ra $\widehat{DAE} = 180^\circ - \alpha$, suy ra cung DE không chứa điểm A của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE$ là cung chứa góc α , dựng trên đoạn DE.

Do DE là tiếp tuyến chung của (O), (O') và A, B là hai giao điểm của hai đường tròn đó, nên A và B cùng phía với DE, do đó hai cung chứa góc α nói trên đối xứng nhau qua DE. Vậy các đường tròn chứa các cung đó bằng nhau, tức là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DBE bằng nhau.

Câu 5. Với mọi x, y, z ta có:
$$\begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ (y-2)^2 \geq 0 \\ (z-2)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq 4x - 4 \\ y^2 \geq 4y - 4 \\ z^2 \geq 4z - 4 \end{cases} \quad \text{(0,5đ)}$$

Suy ra với mọi $x, y, z > 0$, ta có: $x^2 + xy^2 + xyz^2 \geq$

$$4x - 4 + x(4y - 4) + xy(4z - 4) = 4xyz - 4. \text{ đpcm. (0,5đ)}$$

.....**HẾT**.....