

ĐỀ THAM KHẢO

Thí sinh làm bài (cả phần trắc nghiệm khách quan và phần tự luận) vào tờ giấy thi

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (3,0 điểm)

Câu 1. Giá trị của biểu thức  $A = \sqrt{4}$  là

- A. 2.                                      B. -2.                                      C. -16.                                      D. 16.

Câu 2. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất?

- A.  $y = 1 - \frac{1}{x}$ .                                      B.  $y = 2\sqrt{x} + 1$ .                                      C.  $y = x^2 + 1$ .                                      D.  $y = 3 + 8x$ .

Câu 3. Hệ số góc của đường thẳng  $(d): y = \frac{1}{2}x + 3$  là

- A. 3.                                      B.  $\frac{1}{2}$ .                                      C.  $\frac{3}{2}$ .                                      D. 2.

Câu 4. Cặp  $(x; y) = (1; -1)$  là nghiệm của hệ phương trình nào dưới đây?

- A.  $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$                                       B.  $\begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$                                       C.  $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$                                       D.  $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

Câu 5. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích  $150m^2$ . Biết rằng, chiều dài hơn chiều rộng là  $5m$ . Chiều rộng mảnh vườn đó là

- A.  $10m$ .                                      B.  $15m$ .                                      C.  $20m$ .                                      D.  $25m$ .

Câu 6. Cho điểm  $M(x_M; y_M)$  thuộc đồ thị hàm số  $y = -2x^2$  có hoành độ  $x_M = 2$ . Khi đó,  $y_M$  bằng

- A. 4.                                      B. -4.                                      C. -8.                                      D. 8.

Câu 7. Phương trình nào sau đây có tổng hai nghiệm bằng 5?

- A.  $x^2 + 5x + 6 = 0$ .                                      B.  $x^2 - 6x + 5 = 0$ .                                      C.  $x^2 + 6x + 5 = 0$ .                                      D.  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

Câu 8. Phương trình nào dưới đây là phương trình bậc hai một ẩn?

- A.  $x^2 - 2x - 6 = 0$ .                                      B.  $x^2 - x^3 + 2 = 0$ .                                      C.  $3x - 5 = 0$ .                                      D.  $x^4 - 4 = 0$ .

Câu 9. Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 5cm, AC = 12cm$ . Khi đó  $\tan C$  bằng

- A.  $\frac{5}{13}$ .                                      B.  $\frac{5}{12}$ .                                      C.  $\frac{13}{5}$ .                                      D.  $\frac{12}{5}$ .

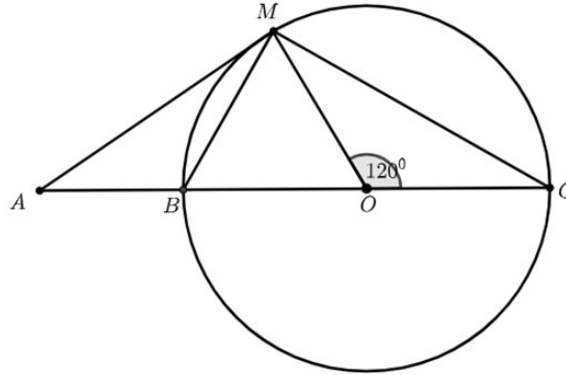
Câu 10. Cho tam giác  $MNP$  vuông tại  $M$ , đường cao  $MH$ . Khi đó

- A.  $MH^2 = NH.HP$ .                                      B.  $MH^2 = NH.NP$ .                                      C.  $MH^2 = HP.PN$ .                                      D.  $MH^2 = MN.MP$ .

Câu 11. Cho hai đường tròn  $(O; 2cm)$  và  $(I; 3cm)$ ,  $OI = 6cm$ . Số tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó là

- A. 1.                                      B. 2.                                      C. 3.                                      D. 4.

**Câu 12.** Cho hình vẽ bên dưới, biết rằng  $MA$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ ,  $\widehat{MOC} = 120^\circ$ .



Số đo  $\widehat{MAC}$  bằng

- A.  $30^\circ$ .                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $60^\circ$ .                      D.  $45^\circ$ .

**PHẦN II. TỰ LUẬN (7,0 điểm)**

**Câu 1 (1,5 điểm).** Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 5}$  và  $B = \frac{x + 3\sqrt{x} - 10}{x - 25}$  với  $x \geq 0, x \neq 25$ .

- Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 9$ .
- Rút gọn biểu thức  $B$ .
- Tìm  $x$  biết rằng  $\frac{B}{A} = \frac{1}{6}$ .

**Câu 2 (2,0 điểm).**

1. Cho đường thẳng  $(d): y = -2x + m$  và parabol  $(P): y = \frac{-1}{2}x^2$ .

- Cho điểm  $C$  có hoành độ là  $-2$  thuộc parabol  $(P)$ . Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d)$  đi qua  $C$ .
- Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $D(x_1; y_1), E(x_2; y_2)$  sao cho  $x_1^2 - 2y_2 = 15$ .

2. Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx + 3y = 8 \\ x - my = 11 \end{cases}$ .

- Giải hệ phương trình khi  $m = -2$ .
- Tìm  $m$  để hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x; y)$  thỏa mãn  $x + y = 5$ .

**Câu 3 (3,0 điểm).** Cho đường tròn tâm  $(O)$  đường kính  $AB$ , điểm  $C$  cố định trên đoạn thẳng  $OB$  ( $C$  khác  $O$  và  $B$ ). Điểm  $M$  di động trên đường tròn  $(O)$ . Đường thẳng  $(d)$  vuông góc với  $AB$  tại  $C$  cắt tia  $AM$  tại  $E$  ở ngoài đường tròn,  $(d)$  cắt đoạn  $MB$  ở  $F$ .

- Chứng minh các tứ giác  $AMFC$  và  $BCME$  nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh  $BF \cdot BM = BC \cdot BA$  và  $AF$  vuông góc với  $EB$ .
- Tia  $EB$  cắt  $(O)$  tại  $N$ . Chứng minh  $A, F, N$  thẳng hàng.
- Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AEF$  luôn đi qua một điểm cố định khác  $A$ .

**Câu 4 (0,5 điểm).** Giải hệ phương trình  $\begin{cases} (x - 4)(2x^2 - 16x + 33) = y(2y^2 + 1) \\ 2xy - 3x + 21 = 3\sqrt[3]{3x + y} \end{cases} (x, y \in \mathbb{R}).$

Hết

Giải đề: Vũ Xuân Hưng – Vũ Minh Anh

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (3,0 điểm)

Câu 1. Giá trị của biểu thức  $A = \sqrt{4}$  là

A. 2.

B. -2.

C. -16.

D. 16.

Lời giải

Ta có  $A = \sqrt{4} \Leftrightarrow A = 2$ . Chọn A.

Câu 2. Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số bậc nhất?

A.  $y = 1 - \frac{1}{x}$ .

B.  $y = 2\sqrt{x} + 1$ .

C.  $y = x^2 + 1$ .

D.  $y = 3 + 8x$ .

Lời giải

Hàm số bậc nhất là  $y = 3 + 8x$ . Chọn D.

Câu 3. Hệ số góc của đường thẳng  $(d): y = \frac{1}{2}x + 3$  là

A. 3.

B.  $\frac{1}{2}$ .

C.  $\frac{3}{2}$ .

D. 2.

Lời giải

Hệ số góc của đường thẳng  $(d): y = \frac{1}{2}x + 3$  là  $\frac{1}{2}$ . Chọn B.

Câu 4. Cặp  $(x; y) = (1; -1)$  là nghiệm của hệ phương trình nào dưới đây?

A.  $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$ .

B.  $\begin{cases} -3x + 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$ .

C.  $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$ .

D.  $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$ .

Lời giải

Cặp  $(x; y) = (1; -1)$  là nghiệm của hệ phương trình  $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$ . Chọn C.

Câu 5. Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích  $150m^2$ . Biết rằng, chiều dài hơn chiều rộng là  $5m$ . Chiều rộng mảnh vườn đó là

A. 10m.

B. 15m.

C. 20m.

D. 25m.

Lời giải

Gọi chiều dài mảnh vườn hình chữ nhật là  $x(m), x > 5$ .

Chiều rộng mảnh vườn hình chữ nhật là  $y(m), 0 < y < x$ .

Vì diện tích mảnh vườn hình chữ nhật là  $150m^2$  nên  $x \cdot y = 150$ . (1)

Vì chiều dài hơn chiều rộng  $5m$  nên  $x - y = 5$ . (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ  $\begin{cases} x \cdot y = 150 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 5y - 150 = 0 \\ x - y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10(TM), y = -15(loai) \\ x = 15 \end{cases}$ .

Vậy chiều rộng mảnh vườn là 10m. Chọn A.

**Câu 6.** Cho điểm  $M(x_M; y_M)$  thuộc đồ thị hàm số  $y = -2x^2$  có hoành độ  $x_M = 2$ . Khi đó,  $y_M$  bằng

A. 4.

B. -4.

C. -8.

D. 8.

**Lời giải**

Vì điểm  $M(x_M; y_M)$  thuộc đồ thị hàm số  $y = -2x^2$  có hoành độ  $x_M = 2 \Rightarrow y_M = -2 \cdot 4 = -8$ . **Chọn C.**

**Câu 7.** Phương trình nào sau đây có tổng hai nghiệm bằng 5?

A.  $x^2 + 5x + 6 = 0$ .

B.  $x^2 - 6x + 5 = 0$ .

C.  $x^2 + 6x + 5 = 0$ .

D.  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

**Lời giải**

Theo Vi - ét ta có  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 5$ . **Chọn D.**

**Câu 8.** Biệt thức  $\Delta$  của phương trình  $x^2 + 3x - 4 = 0$  là

A. 13.

B. 25.

C. 5.

D. -7.

**Lời giải**

Ta có  $\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 4 \cdot 4 = 25$ . **Chọn B.**

**Câu 9.** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = 5\text{cm}$ ,  $AC = 12\text{cm}$ . Khi đó  $\tan C$  bằng

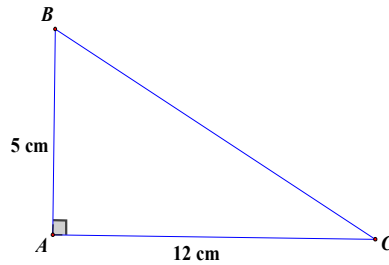
A.  $\frac{5}{13}$ .

B.  $\frac{5}{12}$ .

C.  $\frac{13}{5}$ .

D.  $\frac{12}{5}$ .

**Lời giải**



Ta có  $\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{5}{12}$ . **Chọn B.**

**Câu 10.** Cho tam giác  $MNP$  vuông tại  $M$ , đường cao  $MH = 6\text{cm}$ ,  $HP = 9\text{cm}$ . Độ dài đoạn thẳng  $NH$  là

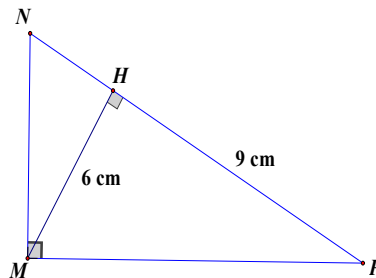
A.  $3\text{cm}$ .

B.  $4\text{cm}$ .

C.  $5\text{cm}$ .

D.  $6\text{cm}$ .

**Lời giải**



Theo hệ thức cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có  $MH^2 = NH \cdot HP \Leftrightarrow NH = 4$ . **Chọn B.**

**Câu 11.** Cho hai đường tròn  $(O; 2\text{cm})$  và  $(I; 3\text{cm})$ ,  $OI = 6\text{cm}$ . Số tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó là

A. 1.

B. 2.

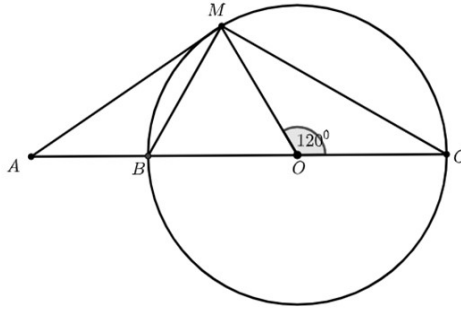
C. 3.

D. 4.

**Lời giải**

Ta có  $3 + 2 = 5 < 6 = OI \Rightarrow (O)$  và  $(I)$  không giao nhau (ở ngoài nhau). Vậy số tiếp tuyến chung là 2. **Chọn B.**

**Câu 12.** Cho hình vẽ bên dưới, biết rằng  $MA$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O)$ ,  $\widehat{MOC} = 120^\circ$ .



Số đo  $\widehat{MAC}$  bằng

**A.**  $30^\circ$ .

**B.**  $90^\circ$ .

**C.**  $60^\circ$ .

**D.**  $45^\circ$ .

**Lời giải**

**Cách 1:** Ta có  $\widehat{MOB} = 180^\circ - \widehat{MOC} = 60^\circ$ .

$\Rightarrow sd\widehat{MC} = \widehat{MOC} = 120^\circ$ ,  $sd\widehat{MB} = 60^\circ$ .

Ta có  $\widehat{MAC} = \frac{sd\widehat{MC} - sd\widehat{MB}}{2} = \frac{120^\circ - 60^\circ}{2} = 30^\circ$ . **Chọn A.**

**Cách 2:** Ta có  $MA = MC = R \Rightarrow \Delta MOC$  cân tại  $O \Rightarrow \widehat{OMC} = \widehat{OCM} = 30^\circ$ .

Ta có  $\widehat{MCB} = \widehat{AMB} = 30^\circ$  (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn một cung).

Ta có  $\widehat{MOB} = 60^\circ$  mà  $MO = OB$  cùng là bán kính  $(O) \Rightarrow \Delta MOB$  đều  $\Rightarrow \widehat{MBA} = 120^\circ$ .

Xét  $\Delta MBA$  có  $\widehat{AMB} + \widehat{MAB} + \widehat{ABM} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{MAB} = 30^\circ = \widehat{MAC}$ .

**PHẦN II. TỰ LUẬN (7,0 điểm)**

**Câu 1 (1,5 điểm).** Cho hai biểu thức  $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5}$  và  $B = \frac{x+3\sqrt{x}-10}{x-25}$  với  $x \geq 0, x \neq 25$ .

a) Tính giá trị của biểu thức  $A$  khi  $x = 9$ .

b) Rút gọn biểu thức  $B$ .

c) Tìm  $x$  biết rằng  $\frac{B}{A} = \frac{1}{6}$ .

**Lời giải**

**a)** Ta có:  $x = 9$  thỏa mãn điều kiện  $x \geq 0, x \neq 25$  thay  $x = 9$  vào  $A$  ta có

$$A = \frac{\sqrt{9}+3}{\sqrt{9}-5} = -3. \text{ Vậy khi } x = 9 \text{ thì } A = -3.$$

**b)**  $B = \frac{x+3\sqrt{x}-10}{x-25} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-5}$ . Vậy  $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-5}$  với  $x \geq 0, x \neq 25$ .

**c)** Ta có  $\frac{B}{A} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-5} : \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-5} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}$  với  $x \geq 0, x \neq 25$ .

$$\text{Vi } \frac{B}{A} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6\sqrt{x}-12 = \sqrt{x}+3 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 15 \Leftrightarrow x = 9 \text{ (TMĐK).}$$

$$\text{Vậy } x = 9 \text{ thì } \frac{B}{A} = \frac{1}{6}.$$

**Câu 2 (2,0 điểm).**

1. Cho đường thẳng  $(d): y = -2x + m$  và parabol  $(P): y = \frac{-1}{2}x^2$ .

- a) Cho điểm  $C$  có hoành độ là  $-2$  thuộc parabol  $(P)$ . Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d)$  đi qua  $C$ .
- b) Tìm  $m$  để đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $D(x_1; y_1), E(x_2; y_2)$  sao cho  $x_1^2 - 2y_2 = 15$ .

**Lời giải**

a) Vì  $C$  có hoành độ là  $-2$  thuộc parabol  $(P)$  nên  $x = -2 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow C(-2; -2)$ .

Vì  $(d)$  đi qua  $C$  nên  $-2 = 4 + m \Leftrightarrow m = -6$ . Vậy  $m = -6$  thì đường thẳng  $(d)$  đi qua  $C$  thuộc Parabol  $(P)$ .

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng  $(d)$  và parabol  $(P)$

$$\text{Ta có } \frac{-1}{2}x^2 = -2x + m \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2m = 0 \quad (1).$$

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đường thẳng  $(d)$  và parabol  $(P)$

Ta có  $\Delta' = 4 - 2m$ . Để đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow 4 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < 2$  (\*)

Với  $m < 2$  thì  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $D(x_1; y_1), E(x_2; y_2)$  với  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình (1). Ta có  $D, E \in (P)$  nên  $D\left(x_1; \frac{-1}{2}x_1^2\right), E\left(x_2; \frac{-1}{2}x_2^2\right)$ .

$$\text{Theo Vi - ét ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \cdot x_2 = 2m \end{cases}$$

Theo

đề

bài

$$x_1^2 - 2y_2 = 15. \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 15 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 15 \Leftrightarrow 16 - 4m = 15 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4} \text{ thỏa mãn}$$

(\*). Vậy  $m = \frac{1}{4}$  thì đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt

$D(x_1; y_1), E(x_2; y_2)$  thỏa mãn  $x_1^2 - 2y_2 = 15$ .

2. Cho hệ phương trình  $\begin{cases} mx + 3y = 8 \\ x - my = 11 \end{cases}$ .

- a) Giải hệ phương trình khi  $m = -2$ .
- b) Tìm  $m$  để hệ phương trình có nghiệm duy nhất  $(x; y)$  thỏa mãn  $x + y = 5$ .

**Lời Giải**

a) Với  $m = -2$  ta có hệ phương trình  $\begin{cases} -2x + 3y = 8 \\ x + 2y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 8 \\ 2x + 4y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{7} \\ y = \frac{30}{7} \end{cases}$ .

Vậy với  $m = -2$  thì nghiệm của hệ phương trình là  $(x; y) = \left(\frac{17}{7}; \frac{30}{7}\right)$ .

b) Ta có  $\begin{cases} mx+3y=8 \\ x-my=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx+3y=8 \\ x=11+my \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11m+m^2y+3y=8 \\ x=11+my \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(m^2+3)=8-11m \\ x=11+my \end{cases}$ .

Vì  $m^2+3 > 0, \forall m$  nên hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi  $m$ .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{8-11m}{m^2+3} \\ x = 11+m \cdot \frac{8-11m}{m^2+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8m+33}{m^2+3} \\ y = \frac{8-11m}{m^2+3} \end{cases}$$

Vậy mọi  $m$  thì hệ phương trình có nghiệm  $(x; y) = \left( \frac{8m+33}{m^2+3}; \frac{8-11m}{m^2+3} \right)$ .

Theo đề bài

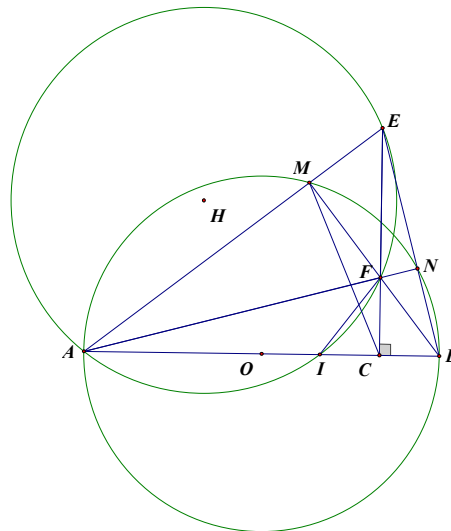
$$x+y=5 \Leftrightarrow \frac{8m+33}{m^2+3} + \frac{8-11m}{m^2+3} = 5 \Leftrightarrow 41-3m = 5m^2+15 \Leftrightarrow 5m^2+3m-26=0 \Leftrightarrow (5m+13)(m-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m=-\frac{13}{5} \end{cases} \cdot \text{Vậy } m=2; m=-\frac{13}{5} \text{ thì hệ có nghiệm duy nhất thỏa mãn } x+y=5.$$

**Câu 3 (3,0 điểm).** Cho đường tròn tâm  $(O)$  đường kính  $AB$ , điểm  $C$  cố định trên đoạn thẳng  $OB$  ( $C$  khác  $O$  và  $B$ ). Điểm  $M$  di động trên đường tròn  $(O)$ . Đường thẳng  $(d)$  vuông góc với  $AB$  tại  $C$  cắt tia  $AM$  tại  $E$  ở ngoài đường tròn,  $(d)$  cắt đoạn  $MB$  ở  $F$ .

- Chứng minh các tứ giác  $AMFC$  và  $BCME$  nội tiếp đường tròn.
- Chứng minh  $BF \cdot BM = BC \cdot BA$  và  $AF$  vuông góc với  $EB$ .
- Tia  $EB$  cắt  $(O)$  tại  $N$ . Chứng minh  $A, F, N$  thẳng hàng.
- Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AEF$  luôn đi qua một điểm cố định khác  $A$ .

**Lời giải**



a) Ta có  $\widehat{AMB} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn), do  $F \in MB \Rightarrow \widehat{AMF} = 90^\circ$ .

Vì đường thẳng  $(d)$  vuông góc với  $AB$  tại  $C$  nên  $\widehat{ACF} = 90^\circ$ .

Xét tứ giác  $AMFC$  có  $\widehat{AMF} + \widehat{ACF} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$  mặt khác  $\widehat{AMF}, \widehat{ACF}$  là hai góc đối nhau trong tứ giác  $AMFC$ . Do đó  $AMFC$  là tứ giác nội tiếp ■

Ta có  $\widehat{AMB} = 90^\circ$  (cmt)  $\Rightarrow \widehat{EMB} = 90^\circ$

Xét tứ giác  $EMCB$  có  $\widehat{EMB} = \widehat{ECB} = 90^\circ$ , suy ra  $M, C$  cùng nhìn cạnh  $EB$  dưới một góc vuông  $\Rightarrow EMCB$  là tứ giác nội tiếp ■

**b)** Xét  $\triangle BFC$  và  $\triangle BAM$  có  $\widehat{FBC} = \widehat{MBA}$  (có chung  $\widehat{B}$ ),  $\widehat{FCB} = \widehat{AMB} = 90^\circ$   
 $\Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle FCB$  (g - g).

$$\Rightarrow \frac{AB}{FB} = \frac{BM}{BC} \Rightarrow AB \cdot BC = BM \cdot FB \quad \blacksquare$$

Xét  $\triangle AEB$  có  $EC \perp AB \Rightarrow EC$  là đường cao trong  $\triangle AEB$ .

Có  $MB \perp AE \Rightarrow MB$  là đường cao  $\triangle AEB$ .

Mà  $EC$  giao  $MB$  tại  $F$ .

$\Rightarrow F$  là trực tâm tam giác  $AEB \Rightarrow AF \perp EB$  ■

**c)** Xét  $(O)$  có  $\widehat{ANB} = 90^\circ$  (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)  $\Rightarrow AN \perp EB$ .

Mà theo b ta có  $AF \perp EB$ .

$\Rightarrow A, F, N$  thẳng hàng ■

**d)** Gọi  $I$  là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp  $\triangle AEF$  với đường thẳng  $AB$ .

Vì  $AIFE$  là tứ giác nội tiếp nên  $\widehat{EAI} = \widehat{IFC}$ .

Vì  $AMFC$  là tứ giác nội tiếp theo a nên  $\widehat{MAC} = \widehat{CFB} \Rightarrow FC$  là tia phân giác  $\widehat{IFB}$ .

Xét  $\triangle IFB$  có  $FC \perp IB$  nên  $FC$  là đường cao trong  $\triangle IFB$  và  $FC$  là tia phân giác  $\widehat{IFB}$ .

Do đó  $\triangle IFB$  cân tại  $F \Rightarrow C$  là trung điểm  $IB$  hay  $I$  và  $B$  đối xứng qua  $C$ .

Do  $C, B$  cố định nên  $I$  cố định.

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AEF$  luôn đi qua một điểm  $I$  cố định khác  $A$  ■

**Câu 4 (0,5 điểm).** Giải hệ phương trình 
$$\begin{cases} (x-4)(2x^2-16x+33) = y(2y^2+1) \\ 2xy-3x+21 = 3\sqrt[3]{3x+y} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

### Lời Giải

Ta có: 
$$\begin{cases} (x-4)(2x^2-16x+33) = y(2y^2+1) & (1) \\ 2xy-3x+21 = 3\sqrt[3]{3x+y} & (2) \end{cases}$$

Xét phương trình (1)  $(x-4)(2x^2-16x+33) = y(2y^2+1) \Leftrightarrow (x-4)[2(x-4)^2+1] = y(2y^2+1)$

$$\Leftrightarrow f(x-4) = f(y).$$

Xét  $f(a) = a(2a^2+1) = 2a^3+a$ .

Với mọi  $a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1 < a_2$ , ta có

$$f(a_1) - f(a_2) = 2a_1^3 + a_1 - (2a_2^3 + a_2) = 2[(a_1 - a_2)(a_1^2 + a_1 a_2 + a_2^2)] + (a_1 - a_2) < 0.$$

$\Rightarrow f(a)$  là hàm số đồng biến  $\Rightarrow x-4 = y$ .

Thay  $y = x-4$  vào (2) ta có phương trình  $2x^2 - 11x + 21 = 3\sqrt[3]{4x-4}$

$$\text{Vi } 2x^2 - 11x + 21 = 2\left(x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{21}{2}\right) = 2\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 + \frac{47}{8} > 0 \Rightarrow 4x - 4 > 0 \Leftrightarrow x > 1.$$



$$(x-3)(2x-5) = 3(\sqrt[3]{4x-4} - 2) \Leftrightarrow (x-3)(2x-5) = \frac{12(x-3)}{\sqrt[3]{(4x-4)^2} + 2\sqrt[3]{4x-4} + 4}$$

$$(x-3) \left( 2x-5 - \frac{12}{\sqrt[3]{(4x-4)^2} + 2\sqrt[3]{4x-4} + 4} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ 2x-5 - \frac{12}{\sqrt[3]{(4x-4)^2} + 2\sqrt[3]{4x-4} + 4} = 0 \end{cases} \Rightarrow x=3, \text{ với } x=3 \Rightarrow y=-1.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình  $(x; y) = (3; -1)$ .

**Cách 2:** Ta có: 
$$\begin{cases} (x-4)(2x^2 - 16x + 33) = y(2y^2 + 1) & (1) \\ 2xy - 3x + 21 = 3\sqrt[3]{3x+y} & (2) \end{cases}$$

Xét phương trình (1)  $(x-4)(2x^2 - 16x + 33) = y(2y^2 + 1) \Leftrightarrow (x-4)[2(x-4)^2 + 1] = y(2y^2 + 1)$

Đặt  $x-4 = a, y = b$  ta có  $a(2a^2 + 1) = b(2b^2 + 1) \Leftrightarrow 2a^3 + a = 2b^3 + b$

$\Leftrightarrow 2(a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(2a^2 + 2ab + b^2 + 1) = 0$

$$\begin{cases} a-b=0 \\ 2a^2 + 2ab + b^2 + 1 = 0 \end{cases}$$

Xét phương trình  $2a^2 + 2ab + b^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (a+b)^2 + a^2 + 1 = 0$ .

Vì  $\begin{cases} (a+b)^2 \geq 0 \\ a^2 + 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow (a+b)^2 + a^2 + 1 = 0$  vô nghiệm.

Xét phương trình  $a-b=0 \Leftrightarrow x-4 = y$ .

Thay  $y = x-4$  vào (2) ta có phương trình  $2x^2 - 11x + 21 = 3\sqrt[3]{4x-4}$

Vì  $2x^2 - 11x + 21 = 2\left(x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{21}{2}\right) = 2\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 + \frac{47}{8} > 0 \Rightarrow 4x-4 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ .

Với  $x > 1$  theo AM - GM ta có:  $3\sqrt[3]{4x-4} = 3\sqrt[3]{2 \cdot (x-1) \cdot 2} \leq x+3$

$2x^2 - 11x + 21 \leq x+3 \Leftrightarrow 2(x-3)^2 \leq 0$ . Mặt khác  $(x-3)^2 \geq 0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow y=-1$ .

Vậy nghiệm của hệ phương trình  $(x; y) = (3; -1)$ .

Hết