PHÒNG GD & ĐT ĐÔ LƯƠNG

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN NĂM HỌC 2024-2025

Môn thi Toán; Lớp: 9

Thời gian làm bài: 120 phút *(Không kể thời gian giao, nhận đề thi)*

Câu 1 (3 điểm)

a) Tìm các số nguyên dương x và y sao cho $x^4 + 4y^4$ là số nguyên tố

b) Cho 2 số nguyên a,b thoả mãn $a^2+b^2+1 = 2(ab+a+b)$
Chứng minh a và b là 2 số chính phương liên tiếp

Câu 2 (3điểm)

a) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2} + \frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1} + \frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$

b) Cho đa thức: $Q(x) = P(x) - 14x$ với $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
Biết $Q(1) = Q(2) = 0$. Tính $P(4) - P(-1)$

Câu 3 (4điểm)

a) Tìm GTNN của
$A = (x - ay)^2 + 6(x - ay) + x^2 + 16y^2 - 8xy + 2x - 8y + 10$
(x, a, y là các số nguyên)

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ x^2y^2 + xy = 12 - xy(x + y) \end{cases}$

Câu 4 (3điểm)

Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của mỗi biến cố sau:

A: " Tổng số chấm thu được từ hai con xúc xắc bằng 6"

B: " Hiệu số chấm thu được từ hai con xúc xắc bằng 2"

C: " Tích số chấm trên hai con xúc xắc là một số chính phương"

Câu 5 (7điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A (AB<AC). Kẻ AH vuông góc với BC tại H. Gọi D,E lần lượt là hình chiếu của H trên AB,AC

a) Biết AB = 6cm: HC = 6,4cm. Tính BC, AC

b) Chứng minh rằng: $DE^3 = EH.BC.DH$

c) Đường thẳng kẻ qua B vuông góc với BC cắt HD tại M. Đường thẳng kẻ qua C vuông góc với BC cắt HE tại N.Chứng minh rằng: M,A,N thẳng hàng và BN,CM,DE đồng quy.

---------Hết----------

PHÒNG GD & ĐT ĐÔ LƯƠNG

HƯỚNG DẪN CHẤM
THI HỌC SINH GIỎI HUYỆN NĂM HỌC 2024-2025
Môn thi Toán; Lớp: 9

Thời gian làm bài: 120 phút *(Không kể thời gian giao, nhận đề thi)*

Câu	Nội Dung	Điểm
1	**a) (1,5điểm)**	
	Ta có $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2$	
	$= (x^2 + 2xy + 2y^2).(x^2 - 2xy + 2y^2)$	0,25đ
	Do x,y $\in Z^+$ nên $0 < (x^2 - 2xy + 2y^2) < (x^2 + 2xy + 2y^2)$	0,25đ
	Vì $x^4 + 4y^4$ là số nguyên tố, suy ra $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$	0,25đ
	hay $(x - y)^2 + y^2 = 1$. Do x,y $\in Z^+$ nên x = y = 1.	0,5đ
	Kiểm tra ta được: $x^4 + 4y^4 = 5$ là số nguyên tố	0,25đ
	b) (1,5điểm)	
	Từ giả thiết, ta có: $a^2+b^2+1 - 2ab + 2a - 2b = 4a$	
	hay $(a - b + 1)^2 = 4a$ (1)	0,5đ
	Do đó a là số chính phương. Đặt a = x^2 ($x \in N$)	0,25đ
	Từ (1) ta có $(x^2 - b + 1)^2 = 4x^2$ suy ra $x^2 - b + 1 = \pm 2x$	
	hay $b = (x - 1)^2$ hoặc b = $(x + 1)^2$	0,5đ
	Vậy a và b là 2 số chính phương liên tiếp	0,25đ
2	**a) (1,5điểm)**	
	$A = \frac{(x^2-x+1)(x^2+x-1)}{(x^2+1+x)(x^2+1-x)} + \frac{(x+x^2-1)(x-x^2+1)}{(x^2+x+1)(x^2+x-1)} + \frac{(x^2-x+1)(x^2-x-1)}{(x^2-x-1)(x^2+x+1)}$	0,75đ
	$A = \frac{(x^2+x-1)}{(x^2+1+x)} + \frac{(x-x^2+1)}{(x^2+x+1)} + \frac{(x^2-x+1)}{(x^2+x+1)} = \frac{(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)} = 1$	0,75đ
	b) (1,5điểm)	
	Vì Q(1) = Q(2) = 0	
	nên x = 1, x = 2 là nghiệm của đa thức Q(x)	0,25đ
	Q(x) là đa thức có hạng tử cao nhất là x^3 nên Q(x) = (x-1)(x-2)(x-k)	0,25đ
	Ta có P(x) = Q(x) + 14x = (x-1)(x-2)(x-k) + 14x với $\forall x$	0,25đ
	Khi đó P(4) = 3.2.(4-k) + 56 = 80 – 6k	0,25đ
	P(-1) = (-2).(-3).(-1-k) –14 = –6k – 20	0,25đ
	Suy ra P(4) – P(–1) = 100	0,25đ

3	**a) (2điểm)** Ta có $A=[(x-ay)^2+6(x-ay)+9]+(x^2+16y^2-8xy)+2(x-4y)+1$ $=(x-ay+3)^2+(x-4y)^2+2(x-4y)+1$ $=(x-ay+3)^2+(x-4y+1)^2\geq 0$	0,25đ
	Suy ra MinA = 0 Khi $\begin{cases}x-ay+3=0\ (1)\\x-4y+1=0\ (2)\end{cases}$	0,25đ
	Từ (1) và (2) suy ra: ay – 4y = 2 hay (a-4).y = 2	0,25đ
	Vì x,y,a ∈ Z nên y; a−4 ∈ Ư(2) = {±1; ±2}	0,25đ
	Giải ra ta tìm được: (x;y;a) = (3;1;6) (7;2;5) (-5;-1;2) (-9;-2;3)	1,0đ
	b) (2điểm) Biến đổi hệ về dạng $\begin{cases}x(x+1)+y(y+1)=8\\x(x+1)y(y+1)=12\end{cases}$	0,25đ
	Do đó $x(x+1)$ và $y(y+1)$ là 2 nghiệm của phương trình $t^2-8t+12=0$ Giải ra được $t_1=2$; $t_2=6$	0,25đ
	Ta có các trường hợp sau: TH1: $\begin{cases}x(x+1)=2\\y(y+1)=6\end{cases}$ TH2: $\begin{cases}x(x+1)=6\\y(y+1)=2\end{cases}$	0,25đ
	Giải TH1 ta được các kết quả: (x,y) = (1;2); (1;-3); (-2;2); (-2;-3)	0,5đ
	Giải TH2 ta được các kết quả: (x,y) = (2;1); (2;-2); (-3;1); (-3;-2)	0,5đ
	Vậy hệ đã cho có 8 nghiệm: (x,y) = (1;2); (1;-3); (-2;2); (-2;-3); (2;1); (2;-2); (-3;1); (-3;-2)	0,25đ
4	Các kết quả có thể của hành động là 36 kết quả **a) (1điểm)** Có 5 kết quả thuận lợi cho biến cố A. Do đó P(A) = $\frac{5}{36}$	1,0đ
	b) (1điểm)Có 8 kết quả thuận lợi cho biến cố B. Do đó P(B) = $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$	1,0đ
	c) (1điểm)Có 8 kết quả thuận lợi cho biến cố C. Do đó P(C) = $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$	1,0đ
	a) (2điểm) Đặt BH = x (0<x<6) ⇒ BC= x+6,4	0,5đ
	Ta có AB^2 = BH.BC ⇒ 6^2 = x(x+6,4)	0,5đ
	Giải ra ta được x = 3,6	0,5đ
	Suy ra BC =10cm; AC = 8cm	0,5đ
	b) (3điểm) +) Ta chứng minh được: $\Delta BDH \sim \Delta HEC$	

5	$\Rightarrow$ BD.CE = EH.DH	0,5đ
	+) C/m được ADHE là hình chữ nhật nên DE = AH	0,5đ
	C/m được BH^2 = BD.BA, CH^2 = CE.CA, AH^2 = BH.CH	0,75đ
	Suy ra $AH^4 = BH^2.CH^2$= BD.BA.CE.CA = BD.CE.BC.AH (Vì BA.CA = BC.AH)	0,75đ
	Suy ra AH^3 = BD.CE.BC = EH.DH.BC	0,25đ
	Vậy DE^3 = EH.DH.BC	0,25đ
	c) (2điểm) +) C/m được $\widehat{CNH} = \widehat{BHM}$; HD = AE	0,25đ
	Gọi giao điểm của NA với HD là M' Ta có $Cos^2\widehat{CNH} = \frac{CN}{HN}.\frac{CN}{HN} = = \frac{CN}{HN}.\frac{NE}{NC} = \frac{NE}{HN} = \frac{AE}{HM'}$ (1) (do $\frac{NC}{NH} = \frac{NE}{NC}$ vì $\Delta ENC \sim \Delta CNH$)	0,25đ
	Ta có $Cos^2\widehat{BHM} = \frac{BH}{MH}.\frac{BH}{MH} = \frac{BH}{MH}.\frac{HD}{BH} = \frac{HD}{MH} = \frac{AE}{HM}$ (2)	0,25đ
	Từ (1) và (2) suy ra: HM'= HM nên M' trùng M Do đó M,A,N thẳng hàng	0,25đ
	+) Có BM//CN, BD//NE, MD//CE Suy ra $\Delta BDM \sim \Delta NEC \Rightarrow \frac{BD}{NE} = \frac{DM}{EC}$ (1)	0,25đ
	Gọi I là giao điểm của MC với ED $\Rightarrow \frac{DI}{EI} = \frac{DM}{EC}$ (2)	0,25đ
	Gọi I' là giao điểm của BN với DE $\Rightarrow \frac{DI'}{EI'} = \frac{BD}{NE}$ (3)	0,25đ
	Từ (1),(2),(3) suy ra: $\frac{DI}{EI} = \frac{DI'}{EI'} \Rightarrow$ I và I' trùng nhau Vậy BN,CM,DE đồng quy	0,25đ

Chú ý:

1. *Thí sinh có thể làm bài bằng cách khác, nếu đúng vẫn được điểm tối đa.*
2. *Nếu thí sinh chứng minh bài hình mà không vẽ hình thì không chấm điểm bài hình.*