PHÒNG GD & ĐT TÂN KỲ

KỲ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 9 CẤP HUYỆN
NĂM HỌC 2024-2025
Môn thi: Toán học
Thời gian 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

Câu 1. *(4,0 điểm)*

1. Rút gọn biểu thức $A=\left(\dfrac{2x-x^2}{2x^2+8}-\dfrac{2x^2}{x^3-2x^2+4x-8}\right)\left(\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1-x}{x}\right)$ với $x\neq 0; x\neq 2$.

2.Viết tập hợp A các số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau từ các số 1,2,7,8, 9. Tính xác suất của biến cố "Số tự nhiên được viết ra là số chẵn" của tập hợp A.

Câu 2: *(5,0 điểm)*

a) Giải phương trình $(x+2)^3+(3x-1)^2=5x(3x+1)+11$.

b) Giải hệ phương trình sau $\begin{cases}\dfrac{4x+5y}{xy}=2\\ 20x+xy=30y\end{cases}$

Câu 3. *(3,0 điểm)*

1. Tìm số nguyên tố p, q, r thoả mãn $p^2+q^2+r^2=302$.
2. Tìm các cặp số nguyên x, y thỏa mãn $x^2-3y^2+2xy-2x-10y+4=0$.
3. Cho m, n,p,q là các số nguyên thoả mãn $m^2+n^2+p^2=q^2$.
   Chứng minh mnpq +2025 viết được dưới dạng hiệu của 2 số chính phương.

Câu 4. *(7,0 điểm)*

Cho tam giác ABC nhọn (AB < AC). Các đường cao AD, BE,CF cắt nhau tại H. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC và AH. Đường thẳng qua M vuông góc BC cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại Q, P.

a) Biết AM = AB. Tính $\dfrac{\tan B}{\tan C}$.

b) Chứng minh $\dfrac{1}{AH^2}+\dfrac{1}{BC^2}=\dfrac{1}{EF^2}$ và trực tâm của tam giác APQ thuộc đường thẳng MH.

c) Tia phân giác của góc BHD cắt DB tại V. Tia phân giác của góc HBD cắt DH tại U. HV cắt BU lại O.Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

$$T=\frac{BU^2}{BO^2}+\frac{HV^2}{HO^2}.$$

Câu 5. *(1,0 điểm)*

Cho x,y,z thực thỏa mãn $x\geq 1, y\geq 1, z\geq 1$ và $x^2+2y^2+3z^2=30$. Tìm GTNN của $P=x+y+z$

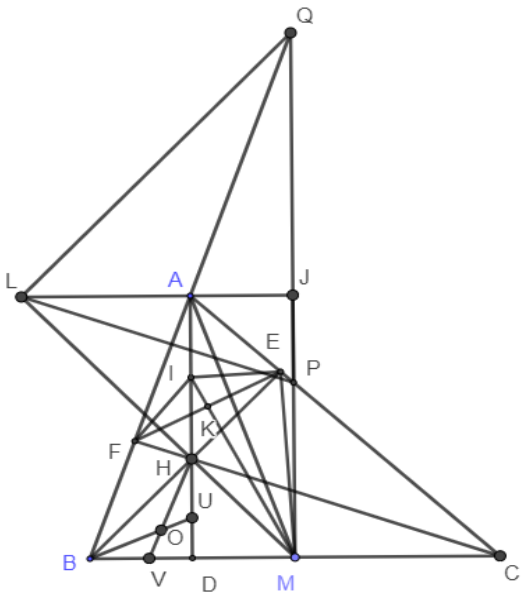
….Hết…

Họ tên thí sinh:……Số báo danh……

HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN ĐỀ THI HSG CẤP HUYỆN
MÔN TOÁN 9 – NĂM HỌC 2024 -2025

Câu	Nội dung	Điểm
1 (4,0 điểm)	**a)** Với $x \neq 0; x \neq 2$ ta có $A = \left(\frac{2x - x^2}{2x^2 + 8} - \frac{2x^2}{x^3 - 2x^2 + 4x - 8} \right) \left(\frac{2}{x^2} + \frac{1 - x}{x} \right)$ $A = \left(\frac{2x - x^2}{2(x^2 + 4)} - \frac{2x^2}{(x - 2)(x^2 + 4)} \right) \left(\frac{2 + x(1 - x)}{x^2} \right)$ $A = \left(\frac{(2x - x^2)(x - 2) - 2.2x^2}{2(x - 2)(x^2 + 4)} \right) . \frac{2 + x(1 - x)}{x^2}$ $A = \left(\frac{-x(x^2 + 4)}{2(x - 2)(x^2 + 4)} \right) . \frac{-(x + 1)(x - 2)}{x^2}$ $A = \frac{x + 1}{2x}$ Vậy với $x \neq 0; x \neq 2$ thì $A = \frac{x + 1}{2x}$	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5**
	2) Tập hợp A các số có 3 chữ số đôi một khác nhau gồn có 5.4.3 = 60 số Số các số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau là số chẵn là 2.4.3=24 số Vậy xác suất để biến cố xẩy ra số chẵn có 3 chữ số là 24: 60 =0,4.	**1,0** **0,5** **0,5**
2 (5,0 điểm)	Ta có $(x + 2)^3 + (3x - 1)^2 = 5x(3x + 1) + 11$. Biến đổi phương trình trên ta được $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 + 9x^2 - 6x + 1 = 15x^2 + 5x + 11$. Thu gọn phương trình ta được $x^3 + x - 2 = 0$ dẫn tới $(x - 1)(x^2 + x + 2) = 0$.Từ đó ta có $x - 1 = 0; x^2 + x + 2 = 0 (vn)$ $x = 1 (tm)$ Vậy phương trình có nghiệm x =1,	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5** **0,5**

		ĐK $x \neq 0; y \neq 0$ Hệ Phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} \frac{5}{x}+\frac{4}{y}=2 \\ \frac{30}{x}-\frac{20}{y}=1 \end{cases}$ đặt $\begin{cases} a=\frac{1}{x} \\ b=\frac{1}{y} \end{cases}$ ($a \neq 0, b \neq 0$) Ta được hệ phương trình ẩn a, b là $\begin{cases} 5a+4b=2 \\ 30a-20b=1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} 25a+20b=8 \\ 30a-20b=1 \end{cases}$ $\begin{cases} a=\frac{1}{5} \\ b=\frac{1}{4} \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} x=5 \\ y=4 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện bài toán) Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(5;4)$	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5** **0,5**
3 (3,0đ)	**a**	Không mất tính tổng quát, giả sử $p \geq q \geq r \geq 2$. Nếu trong 3 số p, q,r đều là 3 số nguyên tố lẻ thì $p^2 + q^2 + r^2$ không chia hết cho 2 nên $p^2 + q^2 + r^2$ khác 302. Do đó trong 3 số p, q, r có ít nhất 1 số chẵn suy ra r =2 lúc đó $p^2 + q^2 = 298$. Trong trường hợp này nếu p, q đều ko có số nào chia hết cho 3 thì $p^2 + q^2$ chia 3 dư 2 mà 298 chia 3 dư 1 nên $p^2 + q^2$ khác 298 suy ra p và q có ít nhất 1 số chia hết cho 3 nên q =3 từ đó suy ra p =17. Vậy (p; q;r) =(17;3;2) và các hoán vị.	0,25 0,25 0,25 0,25
	b		
		Ta có: $x^2-3y^2+2xy-2x-10y+4=0$ Từ đó, $x^2+y^2+1-2x+2xy-2y-4y^2-8y-4=-7$ Dẫn tới $(x+y-1)^2-(2y+2)^2=-7$ Hay $(x+3y+1)((x-y-3)=-7=(-1).7=7.(-1)=-7.1=1.(-7)$ Ta có các trường hợp sau TH1 $\begin{cases} x+3y+1=-1 \\ x-y-3=7 \end{cases}$ TH2. $\begin{cases} x+3y+1=7 \\ x-y-3=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=7 \\ y=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ TH3 TH4	0,25 0,25 0,25

		$\begin{cases} x+3y+1=1 \\ x-y-3=-7 \end{cases}$ $\begin{cases} x+3y+1=-7 \\ x-y-3=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ Vậy $(x;y) \in \{(1;-3);(-3;1);(3;1);(7;-3)\}$	0,25
	c	Nếu m,n,p,q đều là các số nguyên lẻ thì q^2,p^2, n^2,m^2 đều chia 4 dư 1 và $m^2 + n^2 + p^2$ chia 4 dư 3 suy ra $m^2 + n^2 + p^2$ khác q^2. Do đó trong 4 số m,n,p,q có ít nhất 1 số nguyên chẵn lúc đó mnpq +2025 là 1 số nguyên lẻ ta đặt mnpq +2025 =2k +1 $= k^2 + 2k + 1 - k^2 = (k+1)^2 - k^2$ với k là số nguyên	0,5 0,25 0,25
4 (7,0đ)			
	1(3đ)	Do AB = AM nên tam giác ABM cân tại A dẫn tới đường cao AD đồng thời là đường trung tuyến nên BD = DM = BM :2 = CM :2 suy ra CD = 3BD. Tam giác ABD và tam giác ACD vuông tại D. ta có $\tan B = \frac{AD}{DB} = \frac{AD}{DC:3} = 3.\frac{AD}{DC} = 3\tan C$ hay $\frac{\tan B}{\tan C} = 3.$	1 1 1
	b(2+1)đ	Gọi giao điểm của IM và EF là K Áp dụng tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông tam có EM = FM. = BC :2; AI = IE = IF = AH :2 suy ra IM là đường trung trực của EF nên K là trung điểm của EF và EK vuông góc IM. IA = IE nên tam giác AIE cân tại I suy ra $IAE = IEA$ EM = EC (= BC :2) nên tam giác EMC cân tại M suy ra $MEC = MCE$ Do đó $IEA + MEC = IAE + MCE = 90^0$. Suy ra $IEM = 90^0$. Xét tam giác IEM vuông tại E có đường cao EK ta chứng minh được $\frac{1}{EI^2} + \frac{1}{EM^2} = \frac{1}{EK^2}$ kết hợp EF =2EK; BC =2EM; AH =2EI	0,5 0,5 0,5 0,5

		Ta được $\frac{1}{AH^2}+\frac{1}{BC^2}=\frac{1}{EF^2}$ Kẻ đường cao AJ của tam giác AQP cắt MH tại L. Ta có AJMD là hình chữ nhật suy ra AJ = DM và AJ song song DM Nên $\frac{JA}{DH}=\frac{DM}{DH}=\frac{LA}{AH}=\frac{LA+JA}{AH+DH}=\frac{LJ}{AD}(1)$ $BHD=AHE=JAP$ và $BDH=\text{AJ}P=90^0$ suy ra $\Delta DBH \sim \Delta JAP(gg)$ $\frac{\text{AJ}}{DH}=\frac{JP}{DB}(2)$. Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BD}{AD}=\frac{JP}{JL}$ kết hợp $BDA=\text{L}JP=90^0$ Nên $\Delta DBA \sim \Delta JPL(cgc)$ suy ra $JLP=DAB$ từ suy ra PL vuông góc AQ nên L là trực tâm của tam giác APQ (Đpcm)	0,25 0,25 0,25 0,25
	c (1đ)	Đặt BH = a. DH = b. BD = c. với $a^2 = b^2 + c^2$ Áp dụng tính chất đường phân giác ta có $\frac{DU}{UH}=\frac{BD}{BH}=\frac{c}{a}=>\frac{DU}{UH+DU}=\frac{c}{c+a}=>\frac{DU}{b}=\frac{c}{c+a}=>DU=\frac{bc}{a+c}$ $\frac{OU}{BO}=\frac{DU}{DB}=\frac{b}{a+c}=>\frac{OU+BO}{BO}=\frac{b+a+c}{a+c}=>\frac{BU}{BO}=\frac{a+b+c}{a+c}$ Chứng minh tương tự ta có: $\frac{HV}{HO}=\frac{a+c+b}{a+b}$ $T=\frac{BU^2}{BO^2}+\frac{HV^2}{HO^2}\geq 2.\frac{BU}{BO}.\frac{HV}{HO}=2\frac{a+b+c}{a+c}.\frac{a+b+c}{a+b}$ $=2.\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2+ab+ac+bc}$ $=4\frac{a^2+ab+ac+bc}{a^2+ab+ac+bc}=4$ Dấu = xẩy ra khi $\frac{BU}{BO}=\frac{HV}{HO}$ hay b = c khi tam giác BDH vuông cân tại D hay góc ACB = 45^0. Vậy GTNN của $T=\frac{BU^2}{BO^2}+\frac{HV^2}{HO^2}$ là 4. Khi $ACB=45^0$	0,5 0,5 0,5 0,5 1,5
5 (1,0đ)		Ta có: $P^2=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ $3(x^2+y^2+z^2)=x^2+2y^2+3z^2+2x^2+y^2=30+2x^2+y^2\geq 30+2+1=33$ $\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq 11 \quad (1)$ Có: $\left.\begin{array}{l}(x-1)(y-1)\geq 0\Rightarrow xy\geq x+y-1\\(y-1)(z-1)\geq 0\Rightarrow yz\geq y+z-1\\(z-1)(x-1)\geq 0\Rightarrow zx\geq z+x-1\end{array}\right\}\Rightarrow xy+yz+zx\geq 2(x+y+z)-3=2P-3 \quad (2)$ Từ (1) và (2) ta có $\Rightarrow P^2\geq 11+2(2P-3)\Rightarrow P^2\geq 4P+5\Rightarrow P^2-4P-5\geq 0\Leftrightarrow (P+1)(P-5)\geq 0$ $\Rightarrow P\geq 5$ GTNN của $P=5$ khi $x=y=1,z=3.$	0,5 0,5