PHÒNG GD & ĐT THỌ XUÂN

ĐỀ GIAO LƯU ĐỘI TUYỂN HSG CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2024 - 2025
Môn thi: TOÁN LỚP 9 THCS
Thời gian: 150 phút (*không kể thời gian giao đề*)
Đề thi này có 01 trang, gồm 05 câu.

Câu 1 *(2,0 điểm)*: Cho biểu thức $A=\frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}+6}{x-2\sqrt{x}-3}-\frac{x-7\sqrt{x}-8}{x+2\sqrt{x}+1}-\frac{2x+10\sqrt{x}+12}{x-\sqrt{x}-6}$ với $x\ge 0, x\ne 9$. Rút gọn A, và tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{4}{A}$ nhận giá trị nguyên.

Câu 2 *(2,0 điểm)*: Cho a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=7$; $a+b+c=23$; $\sqrt{abc}=3$.

Tính giá trị biểu thức H $=\frac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{c}-6}+\frac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{a}-6}+\frac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{b}-6}$.

Câu 3 *(2,0 điểm)*: Giải phương trinh: $9x^2=\left(x^2+x-5\right)(\sqrt{3x+1}-1)^2$.

Câu 4 *(2,0 điểm)*: Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}=1 \\ \sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{2x+y-1}=3x+y+6 \end{cases}$

Câu 5 *(2,0 điểm)*:. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $3^x-32=y^2$.

Câu 6 *(2,0 điểm)*: Giả sử n là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7. Chứng minh rằng $4n^3-5n-1$ không là số chính phương.

Câu 7 *(2,0 điểm)*: Cho 1 hộp gồm các thẻ đánh số 1;2;3;4;5;6;7;8. Mỗi thẻ khác nhau đánh các số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 2 thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố " Tích của 2 thẻ được lấy ra là một số chẵn".

Câu 8 *(5,0 điểm)*: Cho đường tròn (O; R) và hai đường kính AB, CD sao cho tiếp tuyến tại A của đường tròn (O; R) cắt đường thẳng BC, BD tại hai điểm tương ứng là E và F. Gọi P, Q lần lượt tại trung điểm AE, AF.

1) Chứng minh rằng trực tâm H của Δ BPQ là trung điểm của AO.

2) Các đường thẳng AB và CD thỏa mãn điều kiện gì thì diện tích tam giác BPQ nhỏ nhất.

3) Biết Δ BEF có hình vuông BMKN nội tiếp (K$\in$EF; M$\in$BE, N$\in$BF) sao cho tỉ số giữa các cạnh hình vuông và bán kính đường tròn nội tiếp Δ BEF là $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. Tính các góc nhọn của Δ BEF.

Câu 9 *(1,0 điểm)*: Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc\ge 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{a^2+1+bc}+\frac{1}{b^2+1+ac}+\frac{1}{ab(c^3+1)+1}$.

--------------------------------------- HẾT ---------------------------------------

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO THỌ XUÂN	HƯỚNG DẪN CHẤM GIAO LƯU ĐỘI TUYỂN HSG CẤP TỈNH NĂM HỌC 2024 – 2025 MÔN THI: TOÁN - LỚP 9 *(Hướng dẫn chấm gồm có 09 trang)*

Câu	Nội dung	Điểm
1	**Cho biểu thức** $A=\dfrac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}+6}{x-2\sqrt{x}-3}-\dfrac{x-7\sqrt{x}-8}{x+2\sqrt{x}+1}-\dfrac{2x+10\sqrt{x}+12}{x-\sqrt{x}-6}$ **với** $x\ge 0, x\ne 9$. **Rút gọn A, và tìm tất cả các giá trị của** x **để** $\dfrac{4}{A}$ **nhận giá trị nguyên.**	**2.0**
	$A=\dfrac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)}-\dfrac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-8)}{(\sqrt{x}+1)^2}-\dfrac{2(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}$ $=\dfrac{x-\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{2(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3}$	0,5
	$=\dfrac{x-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}-\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{x+8}{\sqrt{x}+1}$.	0,5
	Theo BĐT Côsi, ta có $A=\sqrt{x}+1+\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}-2\ge 2\sqrt{9}-2=4$	0,5
	Để $\dfrac{4}{A}\in\mathbb{Z}$ thì $A=4\Leftrightarrow\sqrt{x}+1=\dfrac{9}{\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow x=4$ (thỏa mãn). Vậy $x=4$.	0,5
2	**Cho a, b, c thỏa mãn** $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=7$ **;** $a+b+c=23$ **;** $\sqrt{abc}=3$. **Tính giá trị biểu thức H** $=\dfrac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{c}-6}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{a}-6}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{b}-6}$.	**2.0**
	Ta có $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2=a+b+c+2\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)$ mà $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=7$; $a+b+c=23$ nên $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=13$	0,5
	Ta có $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=7\Rightarrow\sqrt{c}-6=-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1$ nên $\sqrt{ab}+\sqrt{c}-6=\sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1=\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{b}-1\right)$ Tương tự $\sqrt{bc}+\sqrt{a}-6=\left(\sqrt{b}-1\right)\left(\sqrt{c}-1\right);\sqrt{ac}+\sqrt{b}-6=\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{c}-1\right)$	0,5

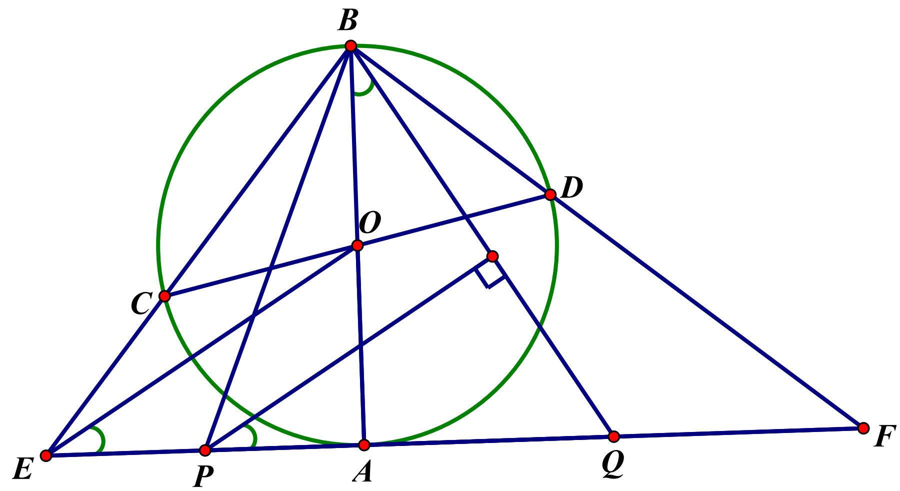
	Vậy H= $\dfrac{1}{\sqrt{ab}+\sqrt{c}-6}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}+\sqrt{a}-6}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}+\sqrt{b}-6}$ $=\dfrac{1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{b}-1\right)}+\dfrac{1}{\left(\sqrt{b}-1\right)\left(\sqrt{c}-1\right)}+\dfrac{1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{c}-1\right)}=$ $\dfrac{\sqrt{c}-1+\sqrt{a}-1+\sqrt{b}-1}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{b}-1\right)\left(\sqrt{c}-1\right)}$	0,5
	$=\dfrac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)-3}{\sqrt{abc}+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)-\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right)-1}=\dfrac{7-3}{3+7-13-1}=-1$ Vậy H = -1.	0,5
3	**Giải phương trinh:** $9x^2=\left(x^2+x-5\right)(\sqrt{3x+1}-1)^2$**.**	**2.0**
	Điều kiện: $x\geq-\dfrac{1}{3}$. Phương trình tương đương: $9x^2(\sqrt{3x+1}+1)^2=\left(x^2+x-5\right)(\sqrt{3x+1}-1)^2(\sqrt{3x+1}+1)^2$	0,5
	$\Leftrightarrow 9x^2(\sqrt{3x+1}+1)^2=\left(x^2+x-5\right)\cdot 9x^2$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+x-5=(\sqrt{3x+1}+1)^2 \quad (1) \end{array}\right.$	0,5
	$(1)\Leftrightarrow x^2-2x-7=2\sqrt{3x+1}\Leftrightarrow 2x^2-4x-14=4\sqrt{3x+1}$ $\Leftrightarrow 2x^2-7x-15+\sqrt{3x+1}(\sqrt{3x+1}-4)=0$ $\Leftrightarrow (x-5)(2x+3)+\dfrac{3(x-5)\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4}=0$ $\Leftrightarrow (x-5)\left(2x+3+\dfrac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4}\right)=0$	0,5
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ 2x+3+\dfrac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1}+4}=0 \end{array}\right.$	0,5

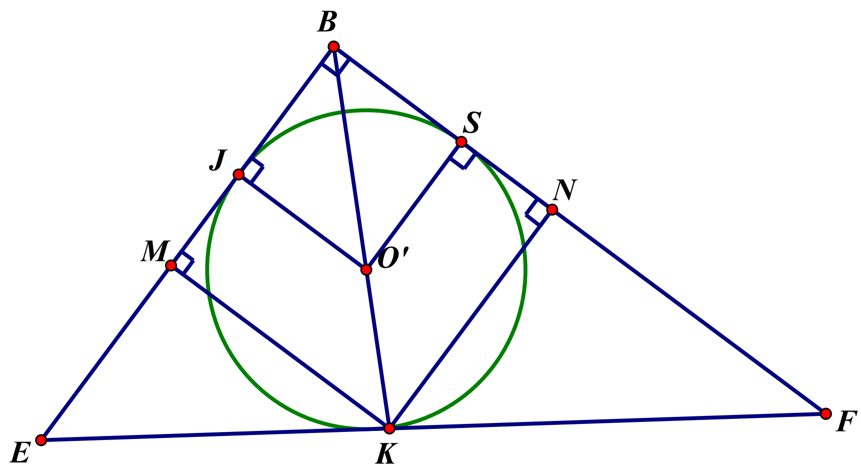
	Do $x \ge -\frac{1}{3} \Rightarrow 2x+3>0 \Rightarrow 2x+3+\frac{3\sqrt{3x+1}}{\sqrt{3x+1+4}}=0$ vô nghiệm. Vây phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x=0, x=5$.	
4	**Giải hệ phương trình** $\begin{cases} x^2+y^2+\dfrac{2xy}{x+y}=1 & (1) \\ \sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{2x+y-1}=3x+y+6 & (2) \end{cases}$	**2.0**
	ĐKXĐ: $\begin{cases} 2x+y-1 \ge 0 \\ x+y \ne 0 \end{cases}$	0,25
	$(1) \Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{2xy}{x+y}=1 \Leftrightarrow (x+y)^2-2xy+\frac{2xy}{x+y}=1$ $\Leftrightarrow (x+y)^3-2xy(x+y)+2xy=(x+y)$	0,25
	Đặt $S=x+y, P=xy\left(S^2 \ge 4P\right)$ ta có: $S^3-2SP+2P=S \quad \Leftrightarrow S(S+1)(S-1)-2P(S-1)=0$ $\Leftrightarrow (S-1)\left(S^2+S-2P\right)=0$	0,25
	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=1 \\ S^2+S-2P=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=1 \\ x^2+y^2+x+y=0 \end{array}\right.$	0,25
	TH1: Với $x+y=1 \Rightarrow y=1-x$, thay vào (2) ta được: $\sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{2x+1-x-1}=3x+1-x+6$ $\Leftrightarrow \sqrt{3x^2+33}+3\sqrt{x}=2x+7$ $\Rightarrow 3x^2+33+2\sqrt{3x^2+33}.3\sqrt{x}+9x=4x^2+28x+49$ $\Rightarrow 6\sqrt{3x^2+33}\cdot\sqrt{x}=x^2+19x+16$	0,25
	$\Rightarrow 36\left(3x^2+33\right)x=x^4+361x^2+256+38x^3+32x^2+608x$ $\Leftrightarrow x^4-70x^3+393x^2-580x+256=0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2(x-4)(x-64)=0$	0,25

	$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=1 \Rightarrow y=0 & (TM) \\ x=4 \Rightarrow y=-3 & (TM) \\ x=64 \Rightarrow y=-63 & (TM) \end{array}\right.$	
	TH2: Với $x^2+y^2+x+y=0$. Ta coi đây là phương trình bậc hai ẩn x. Để tồn tại x thì $\Delta = 1-4\left(y^2+y\right) \ge 0 \Leftrightarrow 4y^2+4y-1 \le 0$ $\Leftrightarrow 4\left(y+\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\left(y+\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right) \le 0$ $\Leftrightarrow -\frac{1+\sqrt{2}}{2} \le y \le \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$ Tương tự ta cũng có $-\frac{1+\sqrt{2}}{2} \le x \le \frac{-1+\sqrt{2}}{2}$.	0,25
	Suy ra $2x+y-1 \le 2.\frac{-1+\sqrt{2}}{2}+\frac{-1+\sqrt{2}}{2}-1<0$, không thỏa mãn điều kiện $2x+y-1 \ge 0$ nên trường hợp này hệ vô nghiệm. Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là $\{(1;0),(4;-3),(64;-63)\}$.	0,25
5	**Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:** $3^x-32=y^2$.	**2.0**
	*) Nếu x lẻ, đặt x=2k+1 $(k \in N)$. Thay vào PT ta có: $3^{2k+1}-32=y^2 \Leftrightarrow 3.9^k-32=y^2$	0,25
	Ta có: $9 \equiv 1(\bmod 8) \Rightarrow 9^k \equiv 1(\bmod 8) \Rightarrow 3.9^k \equiv 3(\bmod 8) \Rightarrow 3.9^k-32 \equiv 3(\bmod 8)$ Do đó $y^2 \equiv 3(\bmod 8)$ (vô lý vì số chính phương chia cho 8 dư 0 hoặc 1)	0,25
	*) Nếu x chẵn, đặt x=2k $(k \in N^*)$. Thay vào PT ta có: $3^{2k}-32=y^2 \Leftrightarrow \left(3^k-y\right)\left(3^k+y\right)=32 \quad (1)$	0,25
	Do $3^k+y>3^k-y>0$ và $3^k+y;3^k-y$ là các số chẵn nên từ (1)xảy ra các trường hợp sau: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^k-y=2 \\ 3^k+y=16 \end{cases} \\ \begin{cases} 3^k-y=4 \\ 3^k+y=8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^k=9 \\ y=7 \end{cases} \\ \begin{cases} 3^k=6 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases}$	0,25

	Vậy PT đã cho có nghiệm nguyên dương (x; y) duy nhất (4;7).	0,25
6	**Giả sử n là số tự nhiên thỏa mãn điều kiện $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7. Chứng minh rằng $4n^3-5n-1$ không là số chính phương.**	**2.0**
	Giả sử tồn tại số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7 và $4n^3-5n-1$ là số chính phương. Ta có $4n^3-5n-1=(n+1)\left(4n^2-4n-1\right)$ Đặt UCLN $\left(n+1;4n^2-4n-1\right)=d\left(d\in\mathbb{N}^*\right)$ Suy ra $\begin{cases} n+1 \vdots d \\ 4n^2-4n-1 \vdots d \end{cases}$	0,5
	Có $4n^2-4n-1=4n(n+1)-8(n+1)+7 \vdots d \Rightarrow 7 \vdots d$ Vì $n(n+1)+7$ không chia hết cho 7 nên $n(n+1)$ không chia hết cho 7 , suy ra $n+1$ không chia hết cho 7 , suy ra $d\neq 7\Rightarrow d=1$.	0,5
	Do đó, $n+1$ và $4n^2-4n-1$ là hai số nguyên tố cùng nhau, mà tích của chúng là số chính phương suy ra $n+1$ và $4n^2-4n-1$ là các số chính phương. Suy ra $4n^2-4n-1=a^2(a\in\mathbb{N})\Leftrightarrow(2n-1)^2-a^2=2\Leftrightarrow(2n-a-1)(2n+a-1)=2$ Vì $2n-a-1\le 2n+a-1$	0,5
	$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2n-a-1=1 \\ 2n+a-1=2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2n-a-1=-2 \\ 2n+a-1=-1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n=\frac{5}{4} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} n=-\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$, không thoả mãn n,a là các số tự nhiên. Vậy giả sử là sai, ta có điều phải chứng minh.	0,5
7	**Cho 1 hộp gồm các thẻ đánh số 1;2;3;4;5;6;7;8. Mỗi thẻ khác nhau đánh các số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên 2 thẻ trong hộp. Tính xác suất của biến cố “ Tích của 2 thẻ được lấy ra là một số chẵn”**	**2,0**

	Trong hộp có 4 thẻ ghi số lẻ, 4 thẻ ghi số chẵn Lấy ngẫu nhiên hai thẻ ở trong hộp, sau đó tính tích hai số được đánh ở hai tấm thẻ đó nên ta có các khả năng sau: <u>Trường hợp 1</u>: Thẻ số ban đầu lấy ra ghi số lẻ, như vậy thẻ ban đầu có 4 khả năng là 1;3;5;7 Khi đó thẻ sau có thể 7 khả năng xảy ra, trong đó có 4 khả năng sẽ là số chẵn, như vậy có 4 tích là số chẵn Vậy trường hợp này có số biến cố xảy ra là 4.7 = 28 (biến cố) Số biến cố mà tích là số chẵn là 4.4 = 16 (biến cố)	0,75
	<u>Trường hợp 2</u>: Thẻ số ban đầu lấy ra ghi số chẵn, như vậy thẻ ban đầu có 4 khả năng là 2;4;6;8 Khi đó thẻ sau có thể 7 khả năng xảy ra, và tích đều là số chẵn Vậy trường hợp này có số biến cố xảy ra là 4.7 = 28 (biến cố) Số biến cố mà tích là số chẵn là 4.7 = 28 (biến cố)	0,75
	Như vậy: Tổng số biến cố xảy ra là 28 + 28 = 56 (biến cố) Số biến cố mà tích là số chẵn là 16 + 28 = 44 (biến cố) Xác suất của biến cố " Tích của 2 thẻ được lấy ra là một số chẵn" là $\frac{44}{56}=\frac{11}{14}$	0,5
8	Cho đường tròn (O; R) và hai đường kính AB, CD sao cho tiếp tuyến tại A của đường tròn (O; R) cắt đường thẳng BC, BD tại hai điểm tương ứng là E và F. Gọi P, Q lần lượt tại trung điểm AE, AF. a) Chứng minh rằng trực tâm H của ΔBPQ là trung điểm của AO. b) Các đường thẳng AB và CD thỏa mãn điều kiện gì thì diện tích tam giác BPQ nhỏ nhất. c) Biết ΔBEF có hình vuông BMKN nội tiếp ($K\in EF$; $M\in BE$, $N\in BF$) sao cho tỉ số giữa các cạnh hình vuông và bán kính đường tròn nội tiếp ΔBEF là	**6.0**

	$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$. Tính các góc nhọn của Δ BEF.	
		
	a. Chứng minh rằng trực tâm H của Δ BPQ là trung điểm của AO.	**2,0**
	Do BA là đường cao Δ BPQ nên trực tâm H $\in BA$	0,25
	Ta có Δ BEF vuông tại B (CD là đường kính) $\Rightarrow$ BA^2 =AE.AF $\Rightarrow \dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AB}{AF} \Rightarrow \dfrac{AE}{AO}=\dfrac{AB}{AQ} \Rightarrow \Delta$ AEO$\backsim\Delta$ ABQ (c.g.c)	0,75
	$\Rightarrow \widehat{AEO}=\widehat{ABQ}$ lại có $\widehat{ABQ}=\widehat{APH}$ (Cùng phụ với $\widehat{AQB}$) $\Rightarrow \widehat{AEO}=\widehat{APH} \Rightarrow$ EO//PH;	0,5
	Δ AEO có PE=PA (gt) và PH//EO $\Rightarrow$ HO=HA hay H là trung điểm của đoạn thẳng OA.	0,5
	b. Các đường thẳng AB và CD thỏa mãn điều kiện gì thì diện tích tam giác BPQ nhỏ nhất.	**2,0**
	$S_{BPQ}=\dfrac{AB.PQ}{2}=R.PQ$ =R.(AP+AQ) =R. $\dfrac{AE+AF}{2} \geq \dfrac{R}{2}.2\sqrt{AE.AF}=R\sqrt{AB^2}=2R^2$ $S_{BPQ}=2R^2 \Leftrightarrow$ AE=AF $\Leftrightarrow \Delta$ BEF vuông cân tại B $\Leftrightarrow \Delta$ BCD vuông cân tại B $\Leftrightarrow$ AB$\perp$CD	

	c. Biết Δ BEF có hình vuông BMKN nội tiếp (K$\in$EF; M$\in$BE, N$\in$BF) sao cho tỉ số giữa các cạnh hình vuông và bán kính đường tròn nội tiếp Δ BEF là $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. Tính các góc nhọn của Δ BEF.  	**1,0**
	Gọi O’ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BEF. Do tứ giác BMKN là hình vuông $\Rightarrow$BK là đường phân giác của $\widehat{EBF}$ $\Rightarrow$O’$\in$BK	0,25
	Kẻ O’J $\perp$BE; O’S$\perp$BF$\Rightarrow$O’S//KN $\Rightarrow \frac{BK}{BO'}=\frac{KN}{O'S}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ Mà $\frac{BK}{BO'}=\frac{BO'+O'K}{BO'}=1+\frac{O'K}{BO'}\Rightarrow\frac{O'K}{BO'}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,25
	Lại có FO’ là phân giác $\widehat{BFE}\Rightarrow\frac{FK}{FB}=\frac{O'K}{O'B}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$FB=$\sqrt{2}$ .FK$\Rightarrow$FB^2 =2FK^2 Tương tự: EB^2=2EK^2	0,25
	$\Rightarrow$EF^2 = EB^2 + FB^2 = 2(EK^2 + FK^2) Hay (EK + KF)^2 = 2(EK^2 + FK^2) $\Leftrightarrow (EK-KF)^2=0\Leftrightarrow EK=KF$ $\Rightarrow\Delta$EBF vuông cân tại B $\Rightarrow\widehat{BEF}=\widehat{BFE}=45^0$	0,25
9	**Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc\ge1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức** $P=\frac{1}{a^2+1+bc}+\frac{1}{b^2+1+ac}+\frac{1}{ab(c^3+1)+1}$.	**1.0**

	$P=\frac{a}{a^3+a+abc}+\frac{b}{b^3+b+abc}+\frac{c}{abc(c^3+1)+c}$ $\le \frac{a}{a^3+a+1}+\frac{b}{b^3+b+1}+\frac{c}{c^3+c+1}$	0,25
	$\forall x>0$, ta luôn có $(x-1)^2(x+1)\ge 0 \Leftrightarrow x^3-x^2-x+1\ge 0$ $\Leftrightarrow x^3+x+1\ge x^2+2x \Leftrightarrow \frac{x}{x^3+x+1}\le \frac{1}{x+2}$, đẳng thức xảy ra khi $x=1$. Suy ra $\frac{a}{a^3+a+1}+\frac{b}{b^3+b+1}+\frac{c}{c^3+c+1}\le \frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}$	0,25
	Ta sẽ chứng minh $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}\le 1$ (6) Thật vậy, (6) $\Leftrightarrow (a+2)(b+2)+(b+2)(c+2)+(a+2)(c+2)\le (a+2)(b+2)(c+2)$ $\Leftrightarrow ab+bc+ca+abc\ge 4$	0,25
	Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có $ab+bc+ac\ge 3\sqrt[3]{ab.bc.ca}=3$ Mặt khác $abc\ge 1 \Rightarrow ab+bc+ca+abc\ge 4$ nên (6) đúng, suy ra $P\le 1$. Vậy $\max P=\frac{\sqrt{3}}{3}$ khi $a=b=c=1$.	0,25