

KỶ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU

NĂM HỌC: 2026 - 2027

Môn thi: TOÁN (Chuyên)

Thời gian làm bài: 150 phút

(không kể thời gian phát đề)

ĐỀ THI VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI

ĐỀ THI

Câu 1 (2 điểm). Cho các phương trình sau:

$$x^2 + 2ax + 3b = 0 \quad (1)$$

$$x^2 + 2bx + 3a = 0 \quad (2)$$

với a, b là các tham số. Biết rằng các phương trình đều có 2 nghiệm phân biệt

a) Chứng minh rằng

$$\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{9}{2}.$$

b) Giả sử hai phương trình trên có đúng một nghiệm chung. Gọi r là nghiệm còn lại của phương trình (1) và s là nghiệm còn lại của phương trình (2). Chứng minh rằng $r + s$ không phụ thuộc vào giá trị của a và b .

Câu 2 (1,5 điểm). Cho tứ giác $ABCD$ với AC vuông góc BD . Biết rằng $AD = 1, BC = 7$. Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tứ giác $ABCD$.

Câu 3 (2 điểm). Cho $f(n) = (n + 4)^4 - n^4$ với n nguyên dương.

a) Chứng minh $f(n)$ chia hết cho 16 với mọi n nguyên.

b) Tìm n để $f(n)$ chia hết cho 3.

c) Tìm n để $f(n)$ chia hết cho 24^2 .

HƯỚNG DẪN GIẢI

CÂU 1. (1,5 điểm)

Lời giải.

a) Do cả 2 phương trình (1) và (2) đều có 2 nghiệm phân biệt nên:

$$\Delta_1 = a^2 - 3b > 0$$

$$\Delta_2 = b^2 - 3a > 0$$

Cộng vế theo vế, ta có $a^2 + b^2 - 3a - 3b > 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(b - \frac{3}{2}\right)^2 > \frac{9}{2}$.

b) Gọi c là nghiệm chung của 2 phương trình trên, ta có

$$c^2 + 2ac + 3b = 0$$

$$c^2 + 2bc + 3a = 0$$

Trừ vế theo vế của 2 phương trình trên, ta có $(2c - 3)(a - b) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{3}{2}$ hoặc $a = b$.

Với $a = b$, hai phương trình (1) và (2) là như nhau nên 2 nghiệm phân biệt kể trên là 2 nghiệm chung của chúng (vô lý).

Vậy $c = \frac{3}{2}$, thế vào (1) ta có $3a + 3b + \frac{9}{4} = 0 \Leftrightarrow a + b = -\frac{3}{4}$.

Áp dụng định lý Viete cho cả 2 phương trình, ta có

$$r + \frac{3}{2} = -2a$$

$$s + \frac{3}{2} = -2b$$

Suy ra $r + s + 3 = -2(a + b) = \frac{3}{2} \Leftrightarrow r + s = -\frac{3}{2}$.

Vậy $r + s$ không phụ thuộc vào a, b .

CÂU 2. (2,0 điểm)

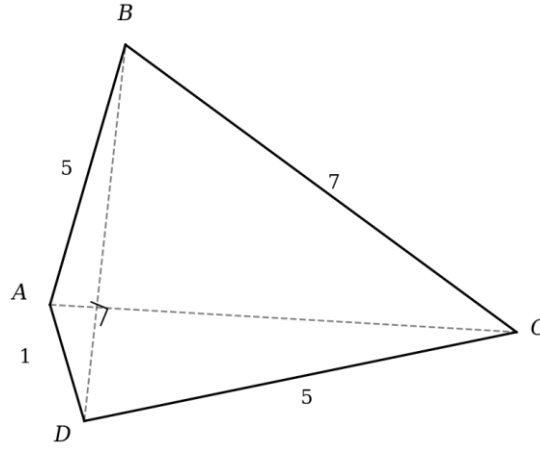
Lời giải. Áp dụng định lý 4 điểm ta có $AB^2 - BC^2 = AD^2 - CD^2$. Suy ra $AB^2 - 7^2 = 1^2 - CD^2$ hay $AB^2 + CD^2 = 50$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có $AB^2 + CD^2 \geq \frac{1}{2}(AB + CD)^2$. Suy ra $AB + CD \leq$

$\sqrt{50 \cdot 2} = 10$. Dẫn tới

$$\text{chu vi } ABCD = AB + BC + CD + DA \leq 1 + 7 + 10 = 18.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $AB = CD = 5$.



Hình minh họa Câu 2

Vậy giá trị lớn nhất của chu vi tứ giác $ABCD$ là 18.

Nhận xét (Chứng minh định lý 4 điểm). Gọi H là giao điểm của AC và BD . Áp dụng định lý Py-ta-go, ta có: $AB^2 - BC^2 = AH^2 + BH^2 - BH^2 - CH^2 = AH^2 - CH^2$. Chứng minh tương tự ta cũng có $AD^2 - CD^2 = AH^2 - CH^2$. Vì vậy $AB^2 - BC^2 = AD^2 - CD^2$.

CÂU 3. (1,5 điểm)

Lời giải.

a) Ta có $f(n) = (n + 4)^4 - n^4 = 16n^3 + 96n^2 + 256n + 64 = 16(n^3 + 6n^2 + 16n + 4) : 16$.

b) Ta xét 3 trường hợp sau:

- Nếu $n \equiv 0 \pmod{3}$ thì $f(n) = (n + 4)^4 - n^4 \equiv 4^4 \equiv 1 \pmod{3}$.
- Nếu $n \equiv 2 \pmod{3}$ thì $f(n) = (n + 4)^4 - n^4 \equiv 6^4 - 2^4 \equiv 2 \pmod{3}$.
- Nếu $n \equiv 1 \pmod{3}$ thì $f(n) = (n + 4)^4 - n^4 \equiv 5^4 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$.

Vậy n chia 3 dư 1 thì $f(n)$ chia hết cho 3.

c) Ta có $f(n) = (n + 4)^4 - n^4 = [(n + 4)^2 + n^2][(n + 4)^2 - n^2] = 16(n^2 + 4n + 8)(n + 2)$. Để tìm n sao cho $f(n)$ chia hết cho $24^2 = 16 \cdot 36$, ta tìm n để $g(n) = (n^2 + 4n + 8)(n + 2)$ chia hết cho $36 = 2^2 \cdot 3^2$.

- Ta có $g(n) = (n^2 + 4n + 8)(n + 2) \equiv n^2(n + 2) \pmod{4}$. Để $g(n)$ chia hết cho 4 thì n chẵn (vì n lẻ thì $g(n)$ lẻ, không chia hết cho 4).
- Theo câu b) thì $f(n)$ chia hết cho 3 khi n chia 3 dư 1. Tức n có dạng $9k + 1, 9k + 4, 9k + 7$.

Với $n \equiv 1 \pmod{9}$ thì $g(n) = (n^2 + 4n + 8)(n + 2) \equiv 13 \cdot 3 \equiv 3 \pmod{9}$.

Với $n \equiv 4 \pmod{9}$ thì $g(n) = (n^2 + 4n + 8)(n + 2) \equiv 40 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{9}$.

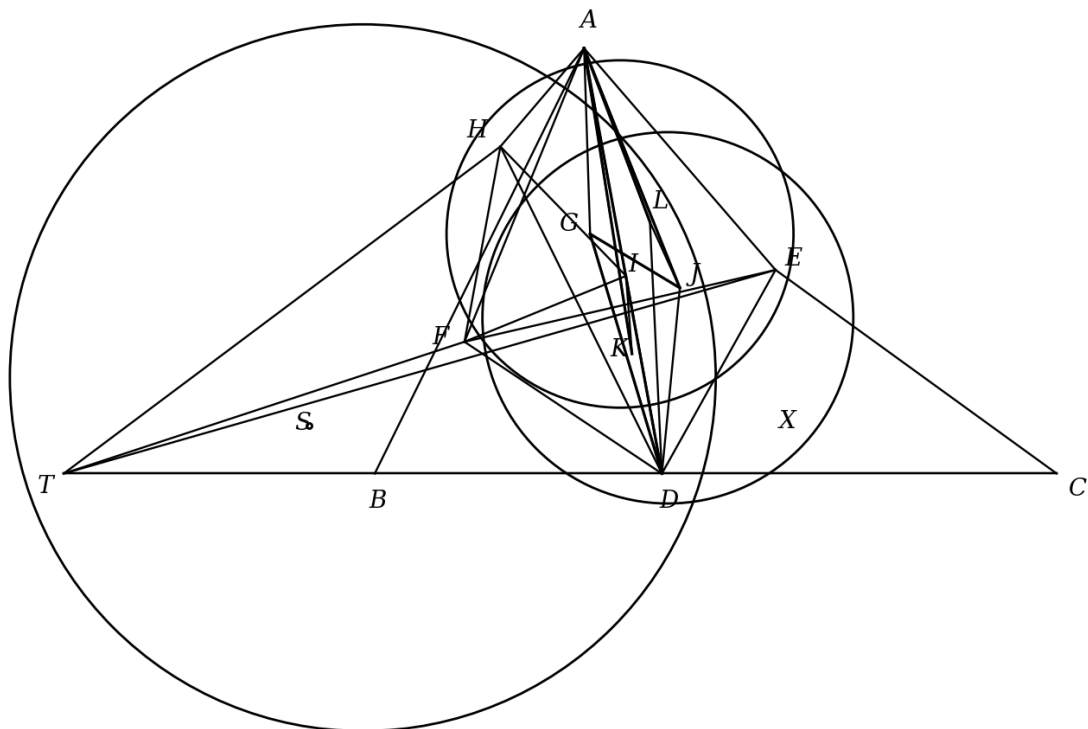
Với $n \equiv 7 \pmod{9}$ thì $g(n) = (n^2 + 4n + 8)(n + 2) \equiv 85 \cdot 9 \equiv 0 \pmod{9}$.

Vậy $g(n)$ chia hết cho 9 khi và chỉ khi n có dạng $9k + 7$.

Vậy $g(n)$ chia hết cho 36 khi n chẵn và n có dạng $9k + 7$. Do n chẵn nên k lẻ, đặt $k = 2l + 1$, suy ra $n = 18l + 16$.

Vậy $n = 18k + 16$ ($k \in \mathbb{N}$) thì $f(n)$ chia hết cho 24^2 .

Lời giải.



Hình minh họa Câu 4

a) Xét tam giác AIE vuông tại E có IJ là đường cao nên $IE^2 = IJ \cdot IA$. Mà $IE = ID$ nên $ID^2 = IJ \cdot IA$. Suy ra $\frac{ID}{IA} = \frac{IJ}{ID}$, suy ra $\triangle IDJ \sim \triangle IDA$ (c.g.c).

b) Do $IE = IF$ nên I là điểm chính giữa cung EF của đường tròn (I) . Từ đó suy ra $\widehat{IHF} = \widehat{IFK}$. Suy ra $\triangle IFH \sim \triangle IKF$. Từ đó $\frac{IH}{IK} = \frac{IF}{IF}$, dẫn đến $ID^2 = IF^2 = IH \cdot IK$. Kéo theo $\triangle IDK \sim \triangle IHD$. Suy ra $\widehat{IHD} = \widehat{IDK}$. Theo câu a) thì $\triangle IDJ \sim \triangle IDA$, dẫn đến $\widehat{IDK} = \widehat{IDJ}$. Như vậy, $\widehat{IHD} = \widehat{IDJ}$, hay bốn điểm D, I, J, H cùng nằm trên một đường tròn.

c) Ta có $IG^2 = ID^2 = IK \cdot IH$, suy ra $\triangle IGK \sim \triangle IHG$. Suy ra $\widehat{IGK} = \widehat{IHG} = \widehat{IDG} = \widehat{IGD}$, từ đó A, G, D thẳng hàng.

Ta có $JL \cdot JD = JE \cdot JF = JA \cdot JI$ nên tứ giác $ALID$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{AIL} = \widehat{ADL} = \widehat{GDJ} = \widehat{GIJ} = \widehat{AIG}$. Suy ra IA là phân giác $\widehat{GIL}$. Suy ra $\triangle AIL = \triangle AIG$ (c.g.c). Suy ra $AG = AL$, dẫn đến AI là trung trực GL . Gọi X là giao điểm GJ và (I) ($X \neq L$). Khi đó $\widehat{XGD} = \widehat{XLD} = \widehat{XLJ} = \widehat{JGD}$, suy ra G, J, X thẳng hàng. Vậy GJ và AL cắt nhau tại X nằm trên (I) .

Lời giải.

a) Ta có cách điền sau thỏa yêu cầu:

2	7	6
9	5	1
4	3	8

b) Với $n \geq 15$ và $n : 3$, ta đặt $n = 3k + 15$ ($k \in \mathbb{N}$), suy ra $k = \frac{n-15}{3}$. Ta thiết lập bảng 3×3 bằng cách cộng thêm k vào mỗi ô của bảng ở câu a) như sau:

$k + 2$	$k + 7$	$k + 6$
$k + 9$	$k + 5$	$k + 1$
$k + 4$	$k + 3$	$k + 8$

Vì $k \geq 0$ nên các giá trị trong bảng đều là các số nguyên dương. Mặt khác, vì các số $1, 2, \dots, 9$ phân biệt nên 9 số trong bảng mới cũng hoàn toàn phân biệt.

Kiểm tra tổng các hàng, cột và đường chéo, ta thấy chúng đều có dạng:

$$3k + 15 = 3\left(\frac{n-15}{3}\right) + 15 = n - 15 + 15 = n$$

Vậy luôn tồn tại một bảng thỏa mãn điều kiện đề bài, chứng tỏ n là số đẹp.

c) Giả sử n là một số đẹp. Gọi các số nguyên dương phân biệt được điền vào bảng 3×3 lần lượt là $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ như sau:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Ta sẽ đi chứng minh: $n : 3$

Theo định nghĩa của số đẹp, tổng các số trên mỗi hàng, cột và đường chéo đều bằng n . Ta có:

- $a + b + c = n$
- $g + h + i = n$
- $a + e + i = n$
- $g + e + c = n$

Từ đó ta thiết lập được đẳng thức sau:

$$(a + e + i) + (g + e + c) - (a + b + c) - (g + h + i) = 2n - 2n = 0$$

Thu gọn biểu thức trên, ta được:

$$2e - b - h = 0 \Leftrightarrow b + h = 2e$$

Lại có $b + e + h = n$. Thay $b + h = 2e$ vào, ta thu được:

$$3e = n$$

Do e là một số nguyên dương nên suy ra n chia hết cho 3.

Ta sẽ đi chứng minh: $n \geq 15$

Gọi S là tổng của tất cả 9 số trong bảng. Nếu tính theo hàng, ta có:

$$S = (a + b + c) + (d + e + f) + (g + h + i) = n + n + n = 3n$$

Mặt khác, vì 9 số được điền là 9 số nguyên dương phân biệt, nên tổng của chúng chắc chắn phải lớn hơn hoặc bằng tổng của 9 số nguyên dương nhỏ nhất đầu tiên, tức là

$$S \geq 1 + 2 + 3 + \dots + 9$$

$$\Leftrightarrow 3n \geq 45$$

$$\Leftrightarrow n \geq 15.$$

Vậy nếu n là số đẹp thì $n \geq 15$ và $n : 3$.

Cách 2. Giả sử tổng các số trên mỗi hàng, cột, đường chéo là n , số ở ô trung tâm là a .

		
	a	
		

Bảng minh họa Cách 2

Tổng 2 số ở 2 ô đỏ = $n - a$

Tổng 2 số ở 2 ô xanh dương = $n - a$

Tổng 2 số ở 2 ô vàng = $n - a$

Tổng 2 số ở 2 ô xanh lá = $n - a$

Tổng các số trong bảng = $3n = a + 4(n - a) = 4n - 3a \Leftrightarrow n = 3a : 3$.

HẾT